Лекция 1

1. Некоторые теоремы об индексе

1. Индекс произведения фредгольмовых операторов. На 11-й лекции в прошлом семестре была сформулирована следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть H_j – гильбертовы пространства $(j = 1, 2, 3)$, и пусть $A_1 : H_1 \to H_2$ и $A_2 : H_2 \to H_3$ – фредгольмовы операторы. Тогда $A_2A_1 : H_1 \to H_3$ – фредгольмов оператор и*

$$\varkappa(A_2A_1) = \varkappa(A_2) + \varkappa(A_1). \tag{1}$$

Такая же теорема верна для операторов в банаховых пространствах, но мы ограничимся случаем операторов в гильбертовых пространствах.

Доказательство. Операторы A_1 и A_2 имеют (двусторонние) параметриксы B_1 и B_2 (см. лекцию 10 в прошлом семестре). Элементарно проверяется, что B_1B_2 – параметрикс для A_2A_1 (проделайте это самостоятельно). Отсюда следует, что A_2A_1 – фредгольмов оператор. Теперь будем доказывать формулу (1). Идея доказательства состоит в его сведéнии к случаю, когда все три пространства конечномерны.

Не ограничивая общности, можно предположить, что $\operatorname{Ker} A_1 = \{0\}$. Действительно, так как $\operatorname{Ker} A_2A_1 \supset \operatorname{Ker} A_1$, то если заменить H_1 на $H_1 \ominus \operatorname{Ker} A_1$, левая и правая части в формуле (1) уменьшатся на $\dim \operatorname{Ker} A_1$. Итак, пусть у A_1 нет нетривиального ядра, так что этот оператор изоморфно отображает H_1 на (замкнутое) подпространство $\operatorname{Im} A_1$ в H_2.

Разложим пространство H_2 в прямую сумму четырех подпространств:

$$H_2 = L \dotplus L_1 \dotplus L_2 \dotplus L_3, \tag{2}$$

где пространства L_j конечномерны. Эти четыре пространства определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} L_1 &= \operatorname{Ker} A_2 \cap \operatorname{Im} A_1, \\ L &= \operatorname{Im} A_1 \ominus L_1, \\ L_2 &= \operatorname{Ker} A_2 \ominus L_1, \\ L_3 &= (\operatorname{Im} A_1 \dotplus L_2)^\perp. \end{aligned}$$

Приведем пояснения. Очевидно, что сумма $L \dotplus L_1$ прямая (даже ортогональная) и что это $\operatorname{Im} A_1$. Далее, из определений L_1 и L_2 видно, что L_2 не содержит ненулевых элементов из $\operatorname{Im} A_1$, поэтому сумма $\operatorname{Im} A_1 \dotplus L_2$ тоже прямая. Прибавляя к ней ее ортогональное дополнение L_3, получаем (2). Конечномерность подпространств L_j следует из конечномерности ядер и коядер фредгольмовых операторов A_1 и A_2.

Теперь H_1 и H_2 можем записать в виде

$$H_1 = A_1^{-1}L \dotplus A_1^{-1}L_1, \tag{3}$$

$$H_3 = A_2L \dotplus A_2L_3 \dotplus (\operatorname{Im} A_2)^\perp. \tag{4}$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

Поясним формулу (3): в L_2 и L_3 нет элементов из $\operatorname{Im} A_1$, а прообразы подпространств L и L_1 оператор A_1 отображает на эти подпространства взаимно однозначно. Далее, поясним формулу (4): оператор A_2 аннулирует L_1 и L_2 и взаимно однозначно отображает подпространства L и L_3 на их образы.

Теперь мы мы можем "отщепить" изоморфизмы

$$A^{-1}L \to L \to A_2 L,$$

определяемые сужениями операторов A_1 и A_2 соответственно на $A^{-1}L$ и L. Эти сужения и их произведение имеют нулевые индексы. Остаются конечномерные пространства

$$\begin{aligned} E_1 &= A_1^{-1} L_1, \\ E_2 &= L_1 \dot{+} L_2 \dot{+} L_3, \\ E_3 &= A_2 L_3 \dot{+} (\operatorname{Im} A_2)^{\perp}. \end{aligned}$$

Здесь сужение оператора A_1 взаимно однозначно отображает E_1 на L_1, а сужение оператора A_2 на E_2 взаимно однозначно отображает L_3 на E_3 и аннулирует L_1 и L_2. Мы свели доказательство формулы (1) к случаю, когда все три пространства конечномерны.

Теперь заметим, что если h_1 и h_2 – конечномерные пространства и $\alpha : h_1 \to h_2$ – линейный оператор, то

$$\varkappa(\alpha) = \dim h_1 - \dim h_2. \tag{5}$$

Это следует из того, что дополнение к ядру и образ оператора α имеют одинаковые размерности. Используя формулу (5) и считая пространства H_j конечномерными, без труда получаем формулу (1). $\square$

2. Гомотопическая инвариантность индекса эллиптического ПДО. Проблема вычисления индекса общего эллиптического оператора поставлена И.М. Гельфандом в 1960 г. Тогда понятия ПДО еще не было, и он имел в виду эллиптические операторы в частных производных на замкнутом многообразии (и дифференциальные эллиптические задачи на компактном многообразии с краем). Задача вызвала большой интерес у математиков, ее окончательное решение для эллиптических ПДО нашли Атья и Зингер в 1962 г. Индекс был вычислен в топологических терминах через главный символ. Мы сейчас обсудим некоторые элементарные соображения, использованные при решении этой задачи. Начнем с редукции к случаю ПДО нулевого порядка.

Пусть A – эллиптический ПДО порядка m на замкнутом многообразии M. Это фредгольмов оператор из $H^m(M)$ в $H^0(M)$ (или из $H^{m+t}(M)$ в $H^t(M)$, но индекс не зависит от t: см. лекцию 11 в предыдущем семестре). Желая вычислить индекс $\varkappa(A)$, мы можем, не ограничивая общности, предположить, что $m = 0$. Действительно, существует эллиптический ПДО Λ_{-m} порядка $-m$, изоморфно отображающий $H^0(M)$ на $H^m(M)$. Индекс такого ПДО равен, конечно, нулю, и в силу тривиального следствия только что доказанной теоремы

$$\varkappa(A) = \varkappa(A\Lambda_{-m}).$$

Впрочем, это следствие, состоящее в том, что *при умножении фредгольмова оператора на обратимый оператор индекс не меняется*, легко проверяется непосредственно (проверьте сами). Полученный ПДО имеет нулевой порядок.

Далее, на гладком многообразии M всегда можно ввести гладкую риманову метрику – скалярное произведение в касательном пространстве T_xM, позволяющее измерять длины не только в T_xM, но и на M. Скалярное произведение в T_xM определяется положительно определенной матрицей – ковариантным тензором порядка 2. Возьмем обратную матрицу, это контравариантный тензор порядка 2. Он определяет скалярное произведение в кокасательном пространстве T^*M. Итак, в T^*M определена длина ковектора. Ковекторы длины 1 образуют сферу S^*_xM, а все вместе эти сферы образуют расслоение S^*M единичных сфер.

Мы утверждаем, что при переходе к ПДО порядка 0 мы можем сохранить неизменным главный символ на S^*M. Действительно, при построении ПДО Λ_{-m} мы можем заранее задать его главный символ $\sigma_0(x,\xi)$ (однородный порядка $-m$ по ξ), и можно предположить, что он равен 1 на S^*M. Произведению двух ПДО отвечает произведение их главных символов, так что главные символы исходного и полученного ПДО совпадают на S^*M.

Главный символ полученного ПДО однороден степени 0 по ξ. Он полностью определяется своими значениями на S^*M, и мы теперь будем рассматривать его как функцию на S^*M. Это гладкая (класса C^∞) функция на S^*M, если рассматриваются скалярные операторы, всюду отличная от нуля. В случае матричного ПДО это гладкая матрица, всюду невырожденная.

Рассмотрим теперь гомотопию A_t $(0 \le t \le 1)$ в классе эллиптических ПДО нулевого порядка заданной размерности, например, скалярных. Этот ПДО зависит от t непрерывно в смысле операторной нормы в $H^0(M)$. На лекции 11 в прошлом семестре мы проверили, что все операторы, достаточно близкие к данному фредгольмову оператору A по норме, (фредгольмовы и) имеют тот же индекс. Более точно, верно следующее утверждение, которое сейчас удобно подготовить в виде леммы:

Лемма 1. *Если B – параметрикс для A и $\|\Delta A\| < \|B\|^{-1}$, то оператор $A + \Delta A$ фредгольмов и*

$$\varkappa(A + \Delta A) = \varkappa(A).$$

Поэтому *все операторы A_t имеют один и тот же индекс.*

Обозначим через $\sigma_t(x,\xi)$ главный символ ПДО A_t. Гомотопии ПДО A_t отвечает гомотопия σ_t $(0 \le t \le 1)$ их главных символов. Это гомотопия по гладким эллиптическим символам.

Пусть теперь даны два эллиптических главных символа σ_0 и σ_1, связанные *непрерывной* гомотопией σ_t $(0 \le t \le 1)$. Здесь $\sigma_t(x,\xi)$ – это всюду отличная от нуля функция (или невырожденная матрица заданного порядка) на S^*M, непрерывно зависящая от (t,x,ξ). Будет доказана следующая теорема:

Теорема 2. *Индексы ПДО A_0 и A_1 совпадают.*

Доказательство. Непрерывные функции $\sigma_t(x,\xi)$ можно равномерно аппроксимировать гладкими по (x,ξ), поэтому, не ограничивая общности, можно

предположить функции $\sigma_t(x,\xi)$ гладкими по (x,ξ). Гладкому главному символу σ_t можно сопоставить эллиптический ПДО.

ПДО на M имеют вид

$$A = \sum_j^N \varphi_j A_j \psi_j \cdot, \tag{6}$$

где j-е слагаемое отвечает j-й координатной окрестности, $\varphi_j(x)$ и $\psi_j(x)$ – гладкие функции с носителями в этой окрестности и A_j – ПДО в $\mathbb{R}^n$ в соответствующих локальных координатах. В частности,

$$A_t = \sum_1^N \varphi_j(x) A_{j,t} \psi_j(x),$$

где $A_{j,t}$ – семейство эллиптических ПДО в $\mathbb{R}^n$ с непрерывными по t символами. Их младшие члены не влияют на индекс оператора A, и мы хотим воспользоваться этим и показать, что для t в достаточно малой окрестности фиксированной точки t_0 имеет место равенство

$$\varkappa(A_t) = \varkappa(A_{t_0}).$$

На лекции 7 в прошлом семестре для ПДО A порядка 0 в $\mathbb{R}^n$ была установлена оценка

$$\|Au\|_0 \le (M_A + \varepsilon)\|u\|_0 + C_\varepsilon \|u\|_{-1},$$

где M_A – верхняя грань модуля главного символа и ε – произвольно малое положительное число. Затем там же было показано, что если верна оценка

$$\|Au\|_0 \le C_1\|u\|_0 + C_2\|u\|_{-1},$$

то найдется оператор T порядка $-\infty$, для которого

$$\|(A-T)u\|_0 \le (C_1 + \varepsilon)\|u\|_0.$$

Из этих двух утверждений следует, утверждение, которое тоже назовем леммой:

Лемма 2. *Для ПДО A порядка 0 в $\mathbb{R}^n$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой оператор $T = T_\varepsilon$ порядка $-\infty$, что*

$$\|(A-T)u\|_0 \le (M_A + \varepsilon)\|u\|_0. \tag{7}$$

Переходя к ПДО A уже на M по формуле (6), мы в качестве *следствия* получаем аналогичный результат, по крайней мере, с фиксированным добавочным коэффициентом C справа: существует такой оператор $T - T_\varepsilon$ на M порядка $-\infty$, что

$$\|(A-T)u\|_0 \le C(M_A + \varepsilon)\|u\|_0. \tag{8}$$

(Может быть, этот коэффициент и не нужен.) Пусть t_0 – фиксированная точка на $[0,1]$, B – параметрикс для A_{t_0} и $\delta > 0$ настолько мало, что при $|t - t_0| < \delta$

$$\max |\sigma_t(x,\xi) - \sigma_{t_0}(x,\xi)| < \frac{1}{3C\|B\|}.$$

Фиксируя t из δ-окрестности точки t_0 и пользуясь следствием из леммы 2, найдем такой оператор T порядка $-\infty$, что

$$\|A_t - A_{t_0} - T\| < \frac{2}{3\|B\|}.$$

Тогда в силу леммы 1

$$\varkappa(A_t) = \varkappa(A_t - T) = \varkappa(A_{t_0}),$$

что и требовалось. □

Мы теперь можем рассмотреть *гомотопические классы* непрерывных отображений расслоения S^*M в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ или в пространство невырожденных комплексных матриц заданного порядка. Каждый такой класс содержит символы эллиптических ПДО нулевого порядка (так как непрерывный невырожденный символ можно аппроксимировать гладким), и *индексы всех эллиптических ПДО в одном классе совпадают.*

Это утверждение легко распространяется на эллиптические ПДО заданного ненулевого порядка.

Что индексы двух эллиптических дифференциальных операторов совпадают, если их можно связать гомотопией в пределах класса дифференциальных эллиптических операторов, было ясно с самого начала исследования проблемы индекса. Но изучать гомотопии в пределах класса эллиптических дифференциальных операторов очень сложно. Другое дело – в классе непрерывных ненулевых функций или невырожденных матриц на S^*M. Именно это и стимулировало построение теории ПДО в начале 60-х гг. А затем быстро выяснилось, что они присутствуют всюду в анализе и классической математической физике. Например, если Γ – (гладкая) граница некоторой ограниченной области в $\mathbb{R}^{n+1}$ и $\mathcal{A}$ – потенциал простого слоя на этой поверхности для уравнения Лапласа или для сильно эллиптической системы 2-го порядка, то его сужение на Γ – эллиптический ПДО (порядка -1). Интегральные операторы, являющиеся эллиптическими ПДО, мы специально рассмотрим в нашем курсе.

Индекс эллиптического ПДО в данном классе равен нулю, если этот класс содержит обратимый ПДО или хотя бы самосопряженный эллиптический ПДО, так как у таких ПДО индекс равен нулю.

Не затрагивая общую формулу Атьи–Зингера, мы можем указать простые условия, достаточные для равенства индекса нулю. Это следствия из формулы Атьи–Зингера, но они могут быть доказаны проще из элементарных гомотопических соображений. Вот они.

1. *Пусть M – замкнутая гиперповерхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Тогда матричные эллиптические ПДО на M с размерами матрицы $N \times N$ имеют нулевой индекс, если $N < n$.*

В частности, так обстоит дело со скалярными эллиптическими ПДО, если $\dim M$ не меньше 2. При $n = 1$, т.е. когда M – гладкая замкнутая кривая, это уже не так, и мы по-видимому сумеем в нашем курсе обсудить вычисление индекса эллитического ПДО на кривой.

2. *Для равенства индекса нулю достаточно также, чтобы главный символ обладал свойством*

$$\sigma(x, -\xi) = \sigma(x)\sigma(x, \xi),$$

где $\sigma(x)$ *– ненулевая функция (или невырожденная матрица), не зависящая от* ξ.

Отметим, что говорить о спектральных свойствах эллиптического ПДО положительного порядка с ненулевым индексом нет смысла, так как его спектр заполняет всю комплексную плоскость.

На следующей лекции мы начнем изучение обширного класса ПДО, *эллиптических с параметром.* Параметр изменяется в замкнутом угле (секторе) Λ на комплексной плоскости с вершиной в начале координат. При большом по модулю $\lambda \in \Lambda$ доказывается обратимость оператора.

Лекция 2

2. Эллиптичность с параметром

Определение 1. Пусть A – ПДО из $\Psi^m_{ph}(M)$ положительного порядка m на замкнутом многообразии M, пока для простоты скалярный, с главным символом $\sigma(x,\xi)$. Этот символ естественно положить равным нулю при $\xi = 0$. Пусть Λ – замкнутый угол (сектор) на комплексной плоскости с вершиной в начале координат. ПДО A называется *эллиптическим с параметром в* Λ, если

$$\sigma(x,\xi) - \lambda \neq 0 \ \text{ при } \ x \in M, \ \ \lambda \in \Lambda, \ \ (\xi,\lambda) \neq 0. \tag{1}$$

Простейшие примеры:

1. Если главный символ $\sigma(x,\xi)$ является вещественной функцией, удовлетворяющей условию эллиптичности, то A эллиптичен с параметром в любом (замкнутом) угле Λ, не имеющем общих точек с вещественной осью, кроме начала координат. Если при этом главный символ принимает только положительные значения (на ненулевых кокасательных векторах), то эллиптичность с параметром имеет место в любом угле Λ, не имеющем общих точек с положительной полуосью, кроме начала координат. Таков, в частности, оператор Бельтрами–Лапласа с обратным знаком $-\Delta$ на римановом многообразии.

2. ПДО A назовем *сильно эллиптическим*, если

$$\operatorname{Re}\sigma(x,\xi) \geq C|\xi|^m \tag{2}$$

(мы считаем, что на многообразии введена метрика, так что можно говорить о длине кокасательного вектора). В этом случае эллиптичность с параметром имеет место в замкнутой левой полуплоскости. (Под сильной эллиптичностью в литературе чаще понимают неотрицательность главного символа; наше предположение является более жестким.)

Из условия (1) следует эллиптичность: достаточно положить $\lambda = 0$.

Оказывается, что из эллиптичности с параметром следует обратимость оператора $A - \lambda I$ при достаточно больших по модулю $\lambda \in \Lambda$ и возможность исследовать резольвенту $(A-\lambda I)^{-1}$, что открывает перспективу изучать другие функции от A.

Мы начнем со случая дифференциального оператора и докажем утверждение об обратимости классическим *методом локализации*, который был известен задолго до появления исчисления ПДО и часто полезен и в наше время.

Итак, мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть оператор в частных производных A на M с гладкими коэффициентами положительного порядка m эллиптичен с параметром в угле Λ. Тогда уравнение*

$$(A - \lambda I)u = f \tag{3}$$

с правой частью из $H^0(M)$ имеет одно и только одно решение $u \in H^m(M)$ при достаточно больших по модулю $\lambda \in \Lambda$. При этом справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{m,M} + |\lambda|\|u\|_{0,M} \leq C_1\|(A-\lambda)u\|_{0,M}, \tag{4}$$

где постоянная C_1 не зависит от u и λ.

Для доказательства сначала надо рассматривать операторы в $\mathbb{R}^n$, эллиптические с параметром. Дадим соответствующее определение, в нем присутствует условие равномерности по x.

Определение 2. Пусть ПДО $A \in \Psi^m_{ph}(\mathbb{R}^n)$ имеет главный символ $\sigma(x,\xi)$; продолжим его нулем в точки $(x,0)$. Пусть Λ – замкнутый угол на комплексной плоскости с вершиной в начале координат. Мы скажем, что оператор A *эллиптичен с параметром в* Λ, если

$$|a(x,\xi)-\lambda| \geq C_2(|\xi|^m + |\lambda|) \text{ при } \lambda \in \Lambda, \tag{5}$$

где C_2 – постоянная, не зависящая от (x,ξ,λ), $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Отсюда следует равномерная эллиптичность: достаточно положить $\lambda = 0$.

Мы рассмотрим сначала уравнение в частных производных

$$(A-\lambda I)u = f \tag{6}$$

в $\mathbb{R}^n$ и при дополнительных предположениях докажем его однозначную разрешимость при больших по модулю $\lambda \in \Lambda$ с априорной оценкой

$$\|u\|_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda|\|u\|_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_3\|f\|_{0,\mathbb{R}^n}. \tag{7}$$

1. Сначала предположим, что главный символ $\sigma(\xi)$ не зависит от x и (однородный) оператор A имеет вид

$$Au(x) = \sigma(D)u(x) = F^{-1}\sigma(\xi)Fu(x). \tag{8}$$

Тогда уравнение (6) при ненулевых $\lambda \in \Lambda$ решается по формуле

$$u(x) = F^{-1}[\sigma(\xi)-\lambda]^{-1}Ff. \tag{9}$$

Так как при $|\lambda| \geq C_4 > 0$, $\lambda \in \Lambda$

$$\frac{1+|\xi|^{2m}+|\lambda|^2}{|\sigma(\xi)-\lambda|^2} \leq \text{Const}, \tag{10}$$

то при этих λ

$$\|u\|^2_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda|^2\|u\|^2_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_5\|f\|^2_{0,\mathbb{R}^n}, \tag{11}$$

что равносильно оценке (7).

2. Теперь мы рассмотрим оператор $A = \sigma(x,D)$ без младших членов с "почти постоянными" коэффициентами, т.е. коэффициентами, достаточно близкими к их значениям в фиксированной точке:

$$Au(x) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)D^\alpha, \quad |a_\alpha(x) - a_\alpha(x_0)| < \varepsilon, \tag{12}$$

где ε – малое положительное число. Оператор с коэффициентами $a_\alpha(x_0)$ обозначим через A_{x_0}. Эллиптичность с параметром в Λ сейчас достаточно предполагать для A_{x_0}. Оператор $A_{x_0} - \lambda I$ обратим при $0 \neq \lambda \in \Lambda$. Обратный оператор обозначим через $B(\lambda)$. Покажем, что при тех же λ, что и в предыдущем пункте доказательства, оператор A обратим и справедлива оценка вида (7), если ε достаточно мало.

Мы имеем

$$(A - \lambda I)B(\lambda) = (A - A_{x_0})B(\lambda) + I, \tag{13}$$

и здесь

$$\|(A - A_{x_0})B(\lambda)f\|_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_6\varepsilon\|B(\lambda)f\|_{m,\mathbb{R}^n} \leq C_7\varepsilon\|f\|_0, \tag{14}$$

так что норма оператора $(A - A_{x_0})B(\lambda)$ меньше 1 при $C_7\varepsilon < 1$. Тогда оператор $A - \lambda I$ имеет правый обратный

$$(A - \lambda I)^{-1} = B(\lambda)[I + (A - A_{x_0})B(\lambda)]^{-1}. \tag{15}$$

Выведем теперь априорную оценку. Имеем

$$\|u\|_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda|\|u\|_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_3\|(A - \lambda I)u\|_{0,\mathbb{R}^n} + C_3\|(A - A_{x_0})u\|_{0,\mathbb{R}^n}, \tag{16}$$

и здесь

$$C_3\|(A - A_{x_0})u\|_{0,R^n} \leq C_6\varepsilon\|u\|_{m,\mathbb{R}^n} < \tfrac{1}{2}\|u\|_{m,\mathbb{R}^n}, \tag{17}$$

если ε достаточно мало. Из (16) и (17) получаем оценку (7) с постоянной $2C_3$ вместо C_3.

3. Теперь мы включим в оператор A с почти постоянными старшими коэффициентами произвольные младшие члены. Будем считать, что он имеет вид $A = A_0 + A_1$, где A_0 – однородный оператор с почти постоянными коэффициентами, для которого результат уже установлен, а A_1 – произвольный оператор, для которого верны оценки

$$\|A_1u\|_{\theta,\mathbb{R}^n} \leq C_9\|u\|_{m-1+\theta,\mathbb{R}^n}, \quad \theta = 1,\, 2. \tag{20}$$

Нам понадобится *интерполяционное неравенство*: при $0 < l < m$ и сколь угодно малом $\varepsilon > 0$

$$\|u\|_{l,\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon\|u\|_{m,\mathbb{R}^n} + C_\varepsilon\|u\|_{0,\mathbb{R}^n}. \tag{21}$$

Его справедливость эквивалентна справедливости аналогичного неравенства с квадратами норм

$$\|u\|^2_{l,\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon\|u\|^2_{m,\mathbb{R}^n} + C_\varepsilon\|u\|^2_{0,\mathbb{R}^n},$$

а последнее легко проверяется при помощи преобразования Фурье, так как

$$1 + |\xi|^{2l} \leq \varepsilon(1 + |\xi|^{2m}) + C_\varepsilon$$

при больших $|\xi|$ за счет первого слагаемого справа, а при ограниченных ξ за счет второго при достаточно большом C_ε.

Пусть $B_0(\lambda)$ – оператор, обратный к $A_0 - \lambda$. Имеем

$$(A_0 + A_1 - \lambda)B_0(\lambda) = I + A_1 B_0(\lambda), \tag{22}$$

и здесь для $v(\lambda) = B(\lambda)f$ мы имеем

$$\begin{aligned} \|A_1 v(\lambda) f\|_{0,\mathbb{R}^n} \leq & C_{10}\|v(\lambda)\|_{1,\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon\|v(\lambda)\|_{m,\mathbb{R}^n} + C'_\varepsilon\|v(\lambda)\|_{0,\mathbb{R}^n} \\ \leq & \varepsilon(\|v(\lambda)\|_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda|\|v(\lambda)\|_{0,\mathbb{R}^n}), \end{aligned} \tag{23}$$

если $C'_\varepsilon < \varepsilon|\lambda|$. Пусть для $A_0 - \lambda I$ выполнено неравенство вида (7) с константой C_3. Тогда правая часть в (23) не превосходит $\varepsilon C_3\|f\|_{0,\mathbb{R}^n}$, и остается предположить, что $\varepsilon C_3 < 1$. Теперь оператор $A - \lambda I$ имеет правый обратный

$$(A - \lambda I)^{-1} = (A_0 - \lambda I)^{-1}[I + A_1(A_0 - \lambda I)^{-1}]^{-1}. \tag{24}$$

Остается получить априорную оценку для $A - \lambda I$. Имеем

$$\|u\|_{m,\mathbb{R}^n} + \|\lambda\|_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_3\|(A - \lambda I)u\|_0 + C_3\|A_1 u\|_{0,\mathbb{R}^n}. \tag{25}$$

Здесь

$$C_3\|A_1 u\|_{0,\mathbb{R}^n} \leq C_{11}\|u\|_{m-1,\mathbb{R}^n} \leq \varepsilon\|u\|_{m,\mathbb{R}^n} + C''_\varepsilon\|u\|_{0,\mathbb{R}^n}. \tag{26}$$

Возьмем здесь, например, $\varepsilon = 1/2$ и предположим, что $C''_\varepsilon < |\lambda|/2$. Получим неравенство вида (7) для $A - \lambda I$ с постоянной $2C_3$ вместо C_3.

Резюмируем результат для дифференциального оператора

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha \tag{27}$$

с достаточно "хорошими" коэффициентами (предположения о них уточним позже).

Предложение 1. *Пусть оператор* (27) *эллиптичен с параметром в* Λ *при* $x = x_0$. *Тогда существуют такие* $\varepsilon > 0$ *и* $\lambda_0 > 0$, *что если старшие коэффициенты в* A *отличаются от их значений при* $x = x_0$ *меньше чем на* ε, *то при* $|\lambda| \geq \lambda_0$, $\lambda \in \Lambda$ *уравнение* (6) *при любой функции* $f \in \mathbb{R}^n$ *имеет одно и только одно решение* $u \in H^m(\mathbb{R}^n)$ *с априорной оценкой вида* (7).

Вернемся теперь к рассмотрению оператора A на многообразии M.

Доказательство теоремы 1. Нам понадобится достаточно мелкое покрытие многообразия M координатными окрестностями O_j $(j = 1, \ldots, N)$, гладкое разбиение единицы

$$\sum_1^N \varphi_j = 1$$

на M, где $\operatorname{supp}\varphi_j \subset O_j$, и система гладких функций ψ_j на M, где $\psi_j = 1$ в окрестности носителя функции φ_j и $\operatorname{supp}\psi_j \subset O_j$. Оператор A, записанный в локальных координатах в O_j, имеет там мало меняющиеся коэффициенты,

мы продолжим его на $\mathbb{R}^n$ и обозначим продолженный оператор через A_j. Мы предположим, что все эти операторы имеют обратные $(A_j - \lambda I)^{-1}$ при $\lambda \in \Lambda$, $|\lambda| \geq \lambda_0$; очевидно, что это можно сделать, считая координатные окрестности достаточно мелкими. Теперь мы положим при этих λ

$$B(\lambda) = \sum \varphi_j (A_j - \lambda I)^{-1} \psi_j.$$

и применим к $B(\lambda)f$ оператор $A - \lambda$. Получим

$$\sum (A_j - \lambda I)\varphi_j (A_j - \lambda I)^{-1} \psi_j f,$$

так как можно считать, что на носителе функции φ_j оператор A, записанный в локальных координатах, совпадает с A_j. Отсюда

$$(A - \lambda)B(\lambda)f = \sum \varphi_j \psi_j f + Tf, \tag{28}$$

где

$$Tf = \sum (A_j \varphi_j - \varphi_j A_j)(A_j - \lambda I)^{-1} \psi_j f. \tag{29}$$

Первая сумма справа в (28) равна f. Коммутаторы $A_j\varphi - \varphi A_j$ – это операторы порядка не выше $m - 1$. Поэтому j-е слагаемое справа в (29) не превосходит по норме

$$C_j \|(A_j - \lambda I)^{-1} \psi_j f\|_{1,\mathbb{R}^n}.$$

Мы уже имеем опыт оценки таких выражений; при достаточно большом по модулю $\lambda \in \Lambda$ они не превосходят $\varepsilon \|\psi_j f\|_{0,\mathbb{R}^n}$ с любым наперед заданным $\varepsilon > 0$. Отсюда нетрудно вывести, что $\|T\| < 1/2$ при больших по модулю λ, и тогда оператор $A - \lambda$ имеет правый обратный

$$(A - \lambda)^{-1} = B(\lambda)(I + T)^{-1}. \tag{30}$$

Нам осталось вывести априорную оценку (4). Мы имеем

$$\|u\|_{m,M} + |\lambda| \|u\|_{0,M} \leq \sum (\|\varphi_j u\|_{m,M} + |\lambda| \|\varphi_j u\|_{0,M})$$

и можем себе позволить оценивать слагаемые после замены норм соответствующими нормами в $\mathbb{R}^n$. Сумма оценивается через

$$\sum \|(A_j - \lambda I)\varphi_j u\|_{0,\mathbb{R}^n}.$$

Здесь надо прокоммутировать φ_j с оператором $A_j - \lambda I$. Сумма

$$\sum \|\varphi_j (A_j - \lambda I) u\|_{0,\mathbb{R}^n}$$

может быть заменена на

$$\sum \|\varphi_j (A - \lambda I) u\|_{0,M},$$

после чего оценивается через $C_{12} \|(A - \lambda I)u\|_{0,M}$. Слагаемые с коммутаторами оцениваются в том же духе, что и раньше, и не мешают получить нужную оценку при достаточно больших по модулю $\lambda \in \Lambda$. $\square$

Вместо проверки априорных оценок можно строить левые обратные операторы.

Лекция 3

3. Обобщения и варианты. Ближайшее обобщение – случай *матричного* оператора A в частных производных на многообразии. Пусть он действует в пространстве вектор-функций размерности N. (Можно рассматривать и оператор, действующий в сечениях соболевских векторных расслоений над M, но это не будем обсуждать, избегая технических усложнений.) Его главный символ – $N \times N$-матрица $\sigma(x,\xi)$, положительно однородная степени m по ξ. Эллиптичность с параметром в угле Λ определяется как справедливость условия

$$\det[\sigma(x,\xi) - \lambda E] \neq 0 \quad ((x,\xi) \in T^*M, \ \ \lambda \in \Lambda, \ \ (\xi,\lambda) \neq 0),$$

где E – единичная $N \times N$-матрица. Аналогичное условие в $\mathbb{R}^n$ состоит в том, что модуль определителя слева равномерно мажорирует $(|\xi|^m + |\lambda|)^N$. Теорема, доказываемая совершенно аналогично теореме 1 из лекции 2, состоит в однозначной разрешимости уравнения

$$(A - \lambda I)u = f \tag{1}$$

с $f \in H^0(M)$ в $H^m(M)$ (это сейчас соболевские пространства вектор-функций на M) при больших по модулю $\lambda \in \Lambda$ с априорной оценкой

$$\|u\|_{m,M} + |\lambda|\|u\|_{0,M} \leq C\|(A - \lambda I)u\|_{0,M}. \tag{2}$$

Следующий этап обобщений – операторы, *полиномиально* зависящие от параметра. Заменяя в (1) λ на λ^m, можно предположить, что параметр имеет "вес" 1 (а не m) относительно дифференцирования. (Если в дальнейшем вес будет отличен от 1, то мы это будем специально оговаривать.) Теперь вместо $A - \lambda^m I$ мы рассмотрим оператор, локально имеющий вид

$$A(\lambda) = A(x, D, \lambda) = \sum_{|\alpha|+\beta \leq m} a_{\alpha,\beta}(x)\lambda^\beta D^\alpha \tag{3}$$

с гладкими коэффициентами. В его главный символ мы включим параметр; локально этот главный символ имеет вид

$$\sigma(x,\xi,\lambda) = \sum_{|\alpha|+\beta=m} a_{\alpha,\beta}(x)\lambda^\beta \xi^\alpha, \tag{4}$$

и здесь инвариантно определены (как функции на T^*M) коэффициенты при каждой степени λ. Условие эллиптичности с параметром в угле Λ имеет теперь вид (в матричном случае)

$$\det \sigma(x,\xi,\lambda) \neq 0 \quad ((x,\xi) \in T^*M, \ \ \lambda \in \Lambda, \ \ (\xi,\lambda) \neq 0). \tag{5}$$

(В рассмотренном раньше случае мы теперь эллиптическим с параметром называем не оператор A, а оператор $A - \lambda^m$.) Аналогичное условие в $\mathbb{R}^n$ состоит в том, что модуль левой части должен равномерно мажорировать $(|\xi| + |\lambda|)^N$.

Далее, *мы можем повысить порядки соболевских норм* (что требует большей гладкости коэффициентов). Доказывается однозначная разрешимость при больших по модулю $\lambda \in \Lambda$ уравнения

$$A(\lambda)u = f \tag{6}$$

в $H^t(M)$, $t \geq m$, при правой части из $H^{t-m}(M)$ с априорной оценкой

$$|||u|||_{t,M} \leq C|||A(\lambda)u|||_{t-m,M}, \tag{7}$$

где

$$|||u|||_{t,M} = [\|u\|^2_{t,M} + |\lambda|^{2t}\|u\|^2_{0,M}]^{1/2}. \tag{8}$$

При фиксированном λ это норма в $H^t(M)$, эквивалентная обычной норме без параметра. Аналогичные нормы вводятся в $\mathbb{R}^n$.

Поясним здесь два технических момента. Во-первых, при построении правого обратного оператора (как оператора, близкого к обратимому) нужно пользоваться в H^{t-m} нормой $|||\cdot|||_{t-m}$ вместо $\|\cdot\|_{t-m}$. Во-вторых, удобно использовать *интерполяционное неравенство* вида

$$|\lambda|^{l-k}\|u\|_k \leq C_{k,l}|||u|||_l \quad (0 < k < l). \tag{9}$$

В $\mathbb{R}^n$ оно проверяется при помощи преобразования Фурье. Из (9) следует, в частности, что при всех λ

$$|||A(x, D, \lambda)u|||_{t-m,M} \leq C'|||u|||_{t,M}, \tag{10}$$

так что имеет место *двусторонняя оценка.*

Возвращаясь к случаю дифференциального оператора в $\mathbb{R}^n$, отметим, что и в этом случае можно получить не только вспомогательные результаты, но и завершающий результат. Для простоты мы ограничимся обсуждением аналога теоремы 1 из предыдущей лекции.

Если мы хотим обойтись при его получении конечным разбиением единицы, то следует предположить, что старшие коэффициенты почти постоянны в окрестности бесконечности, т.е. что при $x \to \infty$ они стремятся к коэффициентам оператора, эллиптического с параметром в Λ и имеющего не зависящие от x коэффициенты. Тогда результаты для $\mathbb{R}^n$ звучат так же, как в случае (компактного) многообразия, и получаются так же; разница состоит только в том, что одна из функций в разбиении единицы будет иметь некомпактный носитель.

Однако можно обойтись и без предположения о стабилизации коэффициентов на бесконечности, используя такие же соображения, как в лекции 6 в прошлом семестре, и окончательный результат для $\mathbb{R}^n$ получается следующий. Мы пока завышаем нужную гладкость коэффициентов. Напомним, что $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$ – пространство бесконечно гладких функций, у которых каждая производная ограничена.

Теорема 2. *Пусть A – оператор в частных производных порядка m с коэффициентами из $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$, эллиптический с параметром в угле Λ. Тогда уравнение*

$$(A-\lambda I)u = f \tag{11}$$

с правой частью из $H^0(\mathbb{R}^n)$ имеет одно и только одно решение в $H^m(\mathbb{R}^n)$ при достаточно больших по модулю $\lambda \in \Lambda$ с априорной оценкой

$$\|u\|_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda|\|u\|_{0,\mathbb{R}^n} \le C\|(A-\lambda I)u\|_{0,\mathbb{R}^n}, \tag{12}$$

где постоянная не зависит от u и λ.

Доказательство. Пусть φ и ψ – неотрицательные функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, первая равна 1 при $|x| \le \sqrt{n}/2$, вторая равна 1 в окрестности носителя функции φ. Положим

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi(x-\alpha)\Big[\sum_\beta \varphi(x-\beta)\Big]^{-1}, \quad \psi_\alpha(x) = \psi(x-\alpha), \tag{13}$$

где α пробегает решетку в $\mathbb{R}^n$ с достаточно малым (насколько, скажем ниже) шагом. Сумма по β в каждой точке положительна и состоит из конечного равномерно ограниченного числа слагаемых. Функции φ_α образуют разбиение единицы.

Начнем снова с построения правого обратного оператора.

В силу ограниченности первых производных от старших коэффициентов оператора A эти старшие коэффициенты равномерно непрерывны. Кроме того, любая производная от любого коэффициента равномерно ограничена. Поэтому мы можем предположить, что при каждом α в окрестности носителя функции ψ_α оператор A совпадает с оператором A_α, таким, что для $A_\alpha - \lambda I$ имеет место предложение 1 об обратимости при $|\lambda| \ge \lambda_0$, $\lambda \in \Lambda$ из лекции 2 с не зависящими от α постоянными λ_0 и C_0 в неравенстве

$$\|u\|_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda|\|u\|_{0,\mathbb{R}^n} \le C_0\|(A_\alpha-\lambda I)u\|_{0,\mathbb{R}^n}. \tag{14}$$

Именно это требование определяет выбор шага в решетке.

Положим

$$B(\lambda) = \sum_\alpha \varphi_\alpha (A_\alpha - \lambda I)^{-1}\psi_\alpha \cdot . \tag{15}$$

Имеем

$$(A-\lambda)B(\lambda)f = \sum (A_\alpha - \lambda I)\varphi_\alpha (A_\alpha-\lambda I)^{-1}\psi_\alpha f = f + Tf, \tag{16}$$

где

$$T(\lambda)f = \sum (A_\alpha\varphi_\alpha - \varphi_\alpha A_\alpha)v_j(\lambda), \quad v_\alpha(\lambda) = (A_\alpha - \lambda I)^{-1}\psi_\alpha f. \tag{17}$$

Здесь

$$A_\alpha\varphi_\alpha - \varphi_\alpha A_\alpha = \sum_{|\beta|\le m-1} a_{\alpha,\beta}(x)D^\beta, \tag{18}$$

и в силу неравенства Шварца

$$|T(\lambda)f(x)|^2 \le \sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha,\beta}(x)|^2 \sum_{\alpha,\beta} |(D^\beta v_\alpha(\lambda))(x)|^2. \tag{19}$$

Интегрируя по x и учитывая равномерную ограниченность суммы квадратов модулей коэффициентов, получаем

$$\|T(\lambda)f\|^2_{0,\mathbb{R}^n} \le C_1 \sum \|v_\alpha(\lambda)\|^2_{m-1,\mathbb{R}^n}. \tag{20}$$

Здесь норму под знаком суммы справа мы оценим сначала при помощи интерполяционного неравенства, а затем при помощи априорной оценки для $A_\alpha - \lambda I$, как уже сказано, равномерной по α. При сколь угодно малом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\lambda_1 \ge \lambda_0$, что при $|\lambda| \ge \lambda_1$, $\lambda \in \Lambda$

$$\|v_\alpha(\lambda)\|^2_{m-1,\mathbb{R}^n} \le \varepsilon \|\psi_\alpha f\|^2_{0,\mathbb{R}^n}. \tag{21}$$

Наконец,

$$\sum \|\psi_\alpha f\|^2_{0,\mathbb{R}^n} \le C_2 \|f\|^2_{0,\mathbb{R}^n} \tag{22}$$

ввиду равномерной ограниченности суммы квадратов функций ψ_α. Таким образом, $\|T(\lambda)\| \le 1/2$ при достаточно малом ε (и достаточно большом по модулю $\lambda \in \Lambda$), что и приводит к построению правого обратного оператора

$$(A - \lambda I)^{-1} = B(\lambda)[I + T(\lambda)]^{-1}. \tag{23}$$

Теперь выведем априорную оценку. Заметим, что в силу априорной оценки для равномерно эллиптического уравнения без параметра

$$\|u\|_{m,\mathbb{R}^n} \le C_3[\|Au\|_{0,\mathbb{R}^n} + \|u\|_{0,\mathbb{R}^n}] \le C_4[\|(A - \lambda I)u\|_{0,\mathbb{R}^n} + \|u\|_{0,\mathbb{R}^n} + |\lambda|\|u\|_{0,\mathbb{R}^n}]. \tag{24}$$

Поэтому теперь следует оценивать $|\lambda|\|u\|_{0,\mathbb{R}^n}$. Оценим квадрат этого выражения. Разбиение единицы переделаем так, чтобы иметь

$$\sum \varphi^2_\alpha(x) \equiv 1. \tag{25}$$

Для этого функции φ_α следует определить по формуле

$$\varphi_\alpha(x) = \varphi(x - \alpha)\left[\sum_\beta \varphi^2(x - \beta)\right]^{-1/2}. \tag{26}$$

Имеем

$$\begin{aligned} |\lambda|^2\|u\|^2_{0,\mathbb{R}^n} &= \sum |\lambda|^2 \|\varphi_\alpha u\|^2_{0,\mathbb{R}^n} \\ \le C_0^2 \sum \|(A_\alpha - \lambda I)\varphi_\alpha u\|^2_{0,\mathbb{R}^n} &\le C_0^2 \sum \|\varphi_\alpha (A - \lambda I)u\|^2_{0,\mathbb{R}^n} + \mathcal{T} \\ &= C_0^2 \|(A - \lambda I)u\|^2_{0,\mathbb{R}^n} + \mathcal{T}, \end{aligned} \tag{26}$$

где

$$\mathcal{T} = C_0^2 \sum \int |(A\varphi_\alpha - \varphi_\alpha A)u|^2 dx.$$

Здесь в каждом слагаемом на u действует дифференциальный оператор (18). Поэтому

$$\mathcal{T} \le C_5 \int \sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha,\beta}(x)|^2 |D^\beta u|^2 dx.$$

Так как сумма квадратов коэффициентов ограничена, то

$$\mathcal{T} \le C_6 \|u\|^2_{m-1,\mathbb{R}^n}. \tag{27}$$

Полученный результат эквивалентен такому:

$$|\lambda| \|u\|_{0,\mathbb{R}^n} \le C_7 \|(A - \lambda I)u\|_{0,\mathbb{R}^n} + C_8 \|u\|_{m-1,\mathbb{R}^n}. \tag{28}$$

Справа в последнем слагаемом применим интерполяционное неравенство. Из (24) и (27) получаем

$$\|u\|_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda| \|u\|_{0,\mathbb{R}^n} \le C_8 \|(A - \lambda I)u\|_{0,\mathbb{R}^n} + \varepsilon [\|u\|_{m,\mathbb{R}^n} + |\lambda| \|u\|_{0,\mathbb{R}^n}]$$

при достаточно большом по модулю $\lambda \in \Lambda$. Считая, что здесь $\varepsilon < 1$, получаем нужную оценку. $\square$

На следующей лекции мы обсудим гладкость коэффициентов, достаточную для получения указанных выше результатов.

4. Простейшее исчисление ПДО с параметром. Рассмотрим символы $a(x, \xi, \lambda)$, определенные на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$, где Λ – замкнутый угол на комплексной плоскости с вершиной в начале, принадлежащие C^∞ по (x, ξ) при каждом фиксированном λ, со следующими свойствами:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi, \lambda)| \le C_{\alpha,\beta} (1 + |\xi| + |\lambda|)^{m - |\beta|}. \tag{1}$$

Этот класс символов будем обозначать через $S^m_\Lambda = S(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \Lambda)$. Класс соответствующих ПДО

$$a(x, D, \lambda)u(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x, \xi, \lambda) u(y)\, dy\, d\xi \tag{2}$$

будем обозначать через $\Psi^m_\Lambda = \Psi^m_\lambda(\mathbb{R}^n)$. Через S^∞_Λ и $S^{-\infty}_\Lambda$ обозначим объединение и пересечение классов S^m_Λ, через Ψ^∞_Λ и $\Psi^{-\infty}_\Lambda$ – объединение и пересечение соответствующих классов ПДО. Класс $\Psi^{-\infty}_\Lambda$ состоит из интегральных операторов

$$\iint k(x, y, \lambda) u(y)\, dy \tag{3}$$

с бесконечно гладкими по (x, y) ядрами k, допускающими оценки

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x, y, \lambda)| \le C_{\alpha,\beta,N} (1 + |\lambda)^{-N} \tag{4}$$

при любом натуральном N.

Будет намечено построение исчисления ПДО в Ψ^{∞}_{Λ}. Чтобы сориентироваться, что оно охватывает, рассмотрим следующий пример. Нас в первую очередь интересует, резольвенты каких операторов (без параметра) мы сможем изучать.

Пример. Пусть m – натуральное число и

$$A(\lambda) = a(x, D) - \lambda^m I. \tag{5}$$

Если $a(x, D)$ – дифференциальный оператор из $\Psi^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, то при дифференцировании символа по x или ξ параметр исчезает. При m-кратном дифференцировании по ξ получается тождественный нуль. Поэтому оценка (1) выполнена для всех α, β.

Если же $a(x, D)$ – ПДО, то производные от символа порядка выше m по ξ – уже, вообще говоря, не нули, так что эти операторы мы не сможем сейчас рассматривать. Но для эллиптических с параметром ДО их параметриксы, как мы увидим, окажутся охваченными исчислением. Чтобы пояснить это, рассмотрим символ

$$b(x, \xi, \lambda) = [a_0(x, \xi) - \lambda^m]^{-1}, \tag{6}$$

где $a_0(x, \xi)$ – главная однородная часть символа $a(x, \xi)$ (главный символ) в предположении эллиптичности с параметром в Λ. Как легко видеть, этот символ принадлежит S^{-m}_{Λ}.

Впрочем, символы типа

$$(|\xi|^2 + |\lambda|^2)^{\gamma} \tag{7}$$

с нецелым γ тоже попадают в исчисление.

В книге М.А. Шубина "Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория" общность немного больше, чем у нас, но только что отмеченные обстоятельства остаются в силе.

Лекция 4

Мы кратко обсудим в этой лекции два варианта исчисления для ПДО с параметром. Первое изложено в книге М.А. Шубина (1978), второе – в книге Г. Грубб (1986 и 1996).

4. Простейшее исчисление для ПДО с параметром (М.А. Шубин). Рассмотрим символы $a(x,\xi,\lambda)$, определенные на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\Lambda$, где Λ – замкнутый угол на комплексной плоскости с вершиной в начале, принадлежащие C^∞ по (x,ξ) при каждом фиксированном λ, со следующими свойствами:

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi,\lambda)|\le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|+|\lambda|)^{m-|\beta|}. \tag{1}$$

Здесь m – любое фиксированное вещественное число. Параметр λ для простоты считаем имеющим вес 1 относительно ξ (или, что то же, относительно дифференцирования). Этот класс символов будем обозначать через $S^m_\Lambda = S(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n,\Lambda)$. Класс соответствующих ПДО

$$A(\lambda)u(x)=a(x,D,\lambda)u(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x,\xi,\lambda)u(y)\,dy\,d\xi \tag{2}$$

будем обозначать через $\Psi^m_\Lambda=\Psi^m_\Lambda(\mathbb{R}^n)$. Через S^∞_Λ и $S^{-\infty}_\Lambda$ обозначим объединение и пересечение классов S^m_Λ, через Ψ^∞_Λ и $\Psi^{-\infty}_\Lambda$ – объединение и пересечение соответствующих классов ПДО. Класс $\Psi^{-\infty}_\Lambda$ состоит из интегральных операторов

$$\int k(x,y,\lambda)u(y)\,dy \tag{3}$$

с бесконечно гладкими по (x,y) ядрами k, допускающими оценки

$$|\partial_x^\alpha\partial_y^\beta k(x,y,\lambda)|\le C_{\alpha,\beta,N}(1+|\lambda|)^{-N} \tag{4}$$

при любом натуральном N.

Чтобы сориентироваться, что охватывает исчисление, рассмотрим следующий пример. Нас в первую очередь интересует, резольвенты каких операторов (без параметра) мы сможем изучать.

Пример. Пусть m – натуральное число и

$$A(\lambda)=a(x,D)-\lambda^m I. \tag{5}$$

Если $a(x,D)$ – дифференциальный оператор из $\Psi^m(\mathbb{R}^n)$, то при дифференцировании символа по x или ξ параметр исчезает. При m-кратном дифференцировании по ξ получается тождественный нуль. Поэтому оценка (1) выполнена для всех α, β.

Если же $a(x,D)$ – ПДО, то производные от символа порядка выше m по ξ – уже, вообще говоря, не нули, и они не убывают при $\lambda\to\infty$, так что эти операторы мы не сможем сейчас рассматривать. Но для эллиптических

с параметром ДО их параметриксы, как мы увидим, окажутся охваченными исчислением. Чтобы пояснить это, рассмотрим символ

$$b(x,\xi,\lambda)=\frac{1}{a_0(x,\xi)-\lambda^m}, \tag{6}$$

где $a_0(x,\xi)$ – однородный многочлен по ξ степени m, в предположении эллиптичности $a_0-\lambda$ с параметром в Λ. Как легко видеть, этот символ принадлежит S^{-m}_{Λ}. Все дело в том, что при дифференцировании по ξ степени разности $a_0-\lambda$ в знаменателе или не меняются, или увеличиваются.

Впрочем, символы типа

$$(1+|\xi|^2+|\lambda|^2)^{\gamma} \tag{7}$$

с нецелым γ тоже попадают в исчисление.

В книге М.А. Шубина "Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория" общность немного больше, чем у нас, но только что отмеченные обстоятельства остаются в силе.

Основные факты исчисления состоят в следующем.

Сначала надо определить смысл *асимптотического разложения* символа:

$$a(x,\xi,\lambda)\sim\sum_0^{\infty}a_j(x,\xi,\lambda), \tag{8}$$

где $a\in S^m_{\Lambda}$ и $a_j\in S^{m-j}_{\Lambda}$. Он состоит в том, что

$$a-\sum_0^{N}a_j\in S^{m-N-1}_{\Lambda}. \tag{9}$$

По заданному асимптотическому разложению символ a строится с точностью до прибавления символа из $S^{-\infty}_{\Lambda}$.

Рассмотрим теперь *ПДО с амплитудой* $p(x,y,\xi,\lambda)\in S^m_{\Lambda}(\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}^n)$ (определение формулируется очевидным образом). Доказывается, что *соответствующий ПДО*

$$(2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}p(x,y,\xi,\lambda)u(y)\,dy\,d\xi \tag{10}$$

принадлежит S^m_{Λ} *и имеет символ* $a(x,\xi,\lambda)$ *с асимптотическим разложением*

$$a(x,\xi,\lambda)\sim\sum_{\alpha}\frac{1}{\alpha!}D_y^{\alpha}\partial_{\xi}^{\alpha}p(x,y,\xi,\lambda)\big|_{y=x}. \tag{11}$$

Мы не приводим доказательства, аналогичные проведенным в случае отсутствия параметра; полезно провести их самостоятельно.

На основе только что сформулированной теоремы доказываются *теоремы о транспонированном и сопряженном операторе и о композиции ПДО с параметром.*

Теорема об ограниченности состоит в следующем: если $A(\lambda) \in \Psi^m_\Lambda$, то

$$|||A(\lambda)u|||_{t-m,\mathbb{R}^n} \le C_t |||u|||_{t,\mathbb{R}^n} \quad (\lambda \in \Lambda). \tag{12}$$

Здесь норма $|||u|||_{t,\mathbb{R}^n}$ при любом вещественном t определяется равенством

$$|||u|||^2_{t,\mathbb{R}^n} = \int (1 + |\xi|^2 + |\lambda|^2)^t |Fu(\xi)|^2 d\xi. \tag{13}$$

Далее вводим *полиоднородные ПДО, зависящие от параметра.* Соответствующий класс обозначаем $\Psi^m_{ph,\Lambda}$. Полный символ $a(x,\xi,\lambda)$ такого ПДО имеет асимптотическое разложение

$$a(x,\xi,\lambda) \approx \sum_0^\infty a_j(x,\xi,\lambda), \tag{14}$$

где функции $a_j(x,\xi,\lambda)$ положительно однородны по (ξ,λ) степени $m-j$. *Главный символ* $a_0(x,\xi,\lambda)$ теперь содержит параметр. Разложение понимается в следующем смысле:

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \left[a(x,\xi,\lambda) - \sum_{j=0}^N a_j(x,\xi,\lambda) \right] \right| \le C_{\alpha,\beta,N} (|\xi|+|\lambda|)^{m-|\beta|-N-1} \quad (|\xi|+|\lambda| \ge C_0 > 0) \tag{15}$$

при $\lambda \in \Lambda$ и любых N, α, β. Если перемножаются полиоднородные ПДО, то, в частности, главный символ произведения равен произведению главных символов.

Эллиптичность с параметром в угле Λ скалярного ПДО $A(\lambda)$ определяется как справедливость неравенства

$$|a_0(x,\xi,\lambda)| \ge C(|\xi| + |\lambda|)^m \quad (|\xi| + |\lambda| \ne 0, \ \ \lambda \in \Lambda). \tag{16}$$

В матричном случае пишется соответствующее неравенство для определителя с учетом размеров матрицы. Важнейший результат состоит в том, что для эллиптического с параметром в Λ ПДО $A(\lambda) \in \Psi^m_{pl,\Lambda}$ с главным символом a_0 строится параметрикс – такой ПДО $B(\lambda) \in \Psi^{-m}_{ph,\Lambda}$ с главным символом a_0^{-1} , что

$$A(\lambda)B(\lambda) = I + T_1(\lambda) \ \text{ и } \ B(\lambda)A(\lambda) = I + T_2(\lambda), \tag{17}$$

где $T_j(\lambda) \in \Psi^{-\infty}_\Lambda$. В частности,

$$|||T_j(\lambda)u|||_{t,\mathbb{R}^n} \le C_{N,t}(1 + |\lambda|)^{-N} |||u|||_{t,\mathbb{R}^n},$$

так что операторы $I + T_j(\lambda)$ обратимы при достаточно большом по модулю $\lambda \in \Lambda$ как операторы в соболевских пространствах $H^t(\mathbb{R}^n)$, по крайней мере, если считать ограниченным промежуток изменения индекса t. Отсюда следует, что эллиптический с параметром в Λ ПДО $A(\lambda) \in \Psi^m_{ph,\Lambda}$ имеет двусторонний обратный $A^{-1}(\lambda) \in \Psi^{-m}_{ph,\Lambda}$ при достаточно больших по модулю $\lambda \in \Lambda$. В частности, справедлива (двусторонняя) априорная оценка.

Далее делаем переход к компактному многообразию M. Определяем классы ПДО $\Psi^m_\Lambda(M)$ и $\Psi^m_{ph,\Lambda}(M)$. Главный символ $a_0(x,\xi,\lambda)$ ПДО $A(\lambda)\in\Psi^m_{ph,\Lambda}(M)$ – функция на $T^*M\times\Lambda$. Получаем, в частности, теорему о композиции. Главный символ произведения двух полиоднородных ПДО равен произведению главных символов. Доказываем теорему об ограниченности в нормах $|||u|||_{t,M}$. Определяем эллиптичность с параметром полиоднородного ПДО $A(\lambda)$ в угле Λ, строим для него сначала параметрикс, а затем двусторонний обратный $A^{-1}(\lambda)$ при достаточно больших по модулю $\lambda\in\Lambda$.

5. Исчисление Грубб для ПДО с параметром (G. Grubb). Положим

$$\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2},\quad \langle\xi,\lambda\rangle=(1+|\xi|^2+\lambda^2)^{1/2} \tag{1}$$

(можно было сделать это раньше). Пусть параметр λ изменяется для простоты на замкнутом луче $\mathbb{R}_+$ (вместо угла) и имеет вес 1 относительно ξ. Грубб рассматривает символы класса $S^{m,\nu}$, где m называется *порядком*, а ν *регулярностью*. (Будем придерживаться ее обозначений.) Оба эти числа не обязательно целые. Символы этого класса состоят из бесконечно гладких функций $a(x,\xi,\lambda)$ на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_\lambda^j a(x,\xi,\lambda)|\le C_{\alpha,\beta,j}(\langle\xi\rangle^{\nu-|\beta|}+\langle\xi,\lambda\rangle^{\nu-|\beta|})\langle\xi,\lambda\rangle^{m-\nu-j}. \tag{2}$$

Если порядок дифференцирования $|\beta|$ по ξ не выше регулярности, то главный член в круглых скобках есть $\langle\xi,\lambda\rangle^{\nu-|\beta|}$, первое слагаемое можно отбросить, удвоив константу, и получается привычная нам оценка

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_\lambda^j a(x,\xi,\lambda)|\le 2C_{\alpha,\beta,j}\langle\xi,\lambda\rangle^{m-|\beta|-j}, \tag{3}$$

в которой к тому же учитывается дифференцирование по λ. Если же $|\beta|>\nu$, то главным членом в круглых скобках становится $\langle\xi\rangle^{\nu-|\beta|}$ и оценка принимает вид

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_\lambda^j a(x,\xi,\lambda)|\le 2C_{\alpha,\beta,j}\langle\xi\rangle^{\nu-|\beta|}\langle\xi,\lambda\rangle^{m-\nu-j}. \tag{4}$$

При фиксированном λ такой символ принадлежит S^m.

Соответствующий класс ПДО обозначим через $\Psi^{m,\nu}$.

Случай $\nu=\infty$ фактически рассмотрен у Шубина без предположений относительно дифференцируемости и производных символа по λ. Предположения Грубб в отношении производных по параметру выделяют ПДО с “хорошей” зависимостью от параметра.

Если $a(x,\xi,\lambda)\in S^{m,\nu}$, то $\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_\lambda^j a(x,\xi,\lambda)\in S^{m-|\beta|,\nu-|\beta|-j}$.

Класс $S^{-\infty,\nu-\infty}$ определяется как пересечение всех классов $S^{-N,\nu-N}$ с натуральными N. Символы этого класса удовлетворяют неравенствам

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\partial_\lambda^j a(x,\xi,\lambda)|\le C_{\alpha,\beta,j,N}\langle\xi\rangle^{-N}(1+\lambda)^{-\nu-j}. \tag{5}$$

Это интегральные операторы

$$\int k(x,y,\lambda)u(y)\,dy \tag{6}$$

с бесконечно гладкими ядрами, удовлетворяющими неравенствам

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \partial_\lambda^j k(x,y,\lambda)| \le C'_{\alpha,\beta,j,N}(1+|x-y|)^{-N}(1+\lambda)^{-\nu-j}. \tag{7}$$

Обратим внимание на то, что убывание при $\lambda \to \infty$ и $j=0$ имеет здесь место только при $\nu > 0$.

Если $a \in S^{m,\nu}$ и $a_l \in S^{m-l,\nu-l}$ $(l = 0,1,\dots)$, то *асимптотическое разложение*

$$a(x,\xi,\lambda) \sim \sum_{l=0}^{\infty} a_l(x,\xi,\lambda) \tag{8}$$

означает, что

$$a - \sum_{j=0}^{M} a_l \in S^{m-M-1,\nu-M-1} \tag{9}$$

при любом M. По заданным $a_l \in S^{m-l,\nu-l}$ строится символ $a \in S^{m,\nu}$ с таким разложением. Два таких символа с одним и тем же разложением различаются на символ из $S^{-\infty,\nu-\infty}$.

Далее выделяется подкласс $\Psi^{m,\nu}_{ph}$ полиоднородных ПДО, в которых символы $a_l(x,\xi,\lambda)$ однородны по (ξ,λ) степени $m-l$ при $|\xi| \ge 1$.

Если $a(x,\xi)$ – символ ДО порядка m (с коэффициентами из $\mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$), то $a(x,\xi) - \lambda^m \in S^{m,+\infty}_{ph}$. Если же $a(x,\xi)$ – символ ПДО из S^m_{ph}, то $a(x,\xi) - \lambda^m \in S^{m,m}_{ph}$.

Если оператор задан при помощи амплитуды из $S^{m,\nu}_{ph}$, то это ПДО из $\Psi^{m,\nu}_{ph}$ с обычным разложением символа, см. формулы (10) и (11) в предыдущем пункте.

Справедливы теоремы о сопряженном операторе и о композиции. При этом если $A(\lambda) \in S^{m_1,\nu_1}_{ph}$ и $B(\lambda) \in S^{m_2,\nu_2}_{ph}$, то $C(\lambda) = A(\lambda)B(\lambda) \in S^{m_1+m_2,\nu(\nu_1,\nu_2)}$, где $\nu(\nu_1,\nu_2) = \min(\nu_1,\nu_2,\nu_1+\nu_2)$.

Эллиптичность с параметром ПДО $A(\lambda) \in \Psi^{m,\nu}_{ph}$ определяется как обычно. В этом случае при $\nu \ge 0$ для ПДО $A(\lambda)$ строится параметрикс $B(\lambda) \in \Psi^{-m,\nu}$. Имеют место соотношения

$$A(\lambda)B(\lambda) = I + T_1(\lambda), \quad B(\lambda)A(\lambda) = I + T_2(\lambda), \tag{10}$$

где $T_j(\lambda) \in \Psi^{-\infty,\nu-\infty}$. Асимптотическое разложение символа оператора $B(\lambda)$ строится по асимптотическому разложению символа ПДО $A(\lambda)$.

Как следствие для ПДО $A(\lambda) \in S^{m,\nu}$ с *положительным* ν выводится его обратимость как оператора из $H^t(\mathbb{R}^n)$ в $H^{t-m}(\mathbb{R}^n)$ при больших λ с априорной оценкой

$$|||u|||_{t,\mathbb{R}^n} \le C|||A(\lambda)u|||_{t-m,\mathbb{R}^n}. \tag{11}$$

Все определения и (загрубленные) результаты переносятся на ПДО на замкнутом многообразии, включая обратимость эллиптического с параметром оператора с $\nu > 0$ при больших значениях параметра.

Лекция 5

3. Функции от операторов

В следующем разделе при некоторых предположениях будут рассмотрены следующие функции от эллиптического ПДО A: резольвента $R_A(\lambda) = (A - \lambda I)^{-1}$, степень A^z,"параболическая" экспонента e^{-tA}. При определенных условиях это интегральные операторы, ядра которых обладают богатейшими свойствами. В частности, изучение этих ядер позволяет вывести асимптотическую формулу для собственных значений оператора A при помощи тауберовых теорем. Но выявляется также масса инвариантов, связанных с оператором и теоретически вычислимых через локальный полный символ (практически вычислимы только первые инварианты): коэффициенты в асимптотических разложениях ядра резольвенты и ядра экспоненты, полюсы "дзета-функции" и вычеты в них. Кратко будет затронута также "гиперболическая" экспонента e^{itA}.

Но сначала мы должны рассмотреть функции от абстрактных операторов.

1. Позитивные операторы. Пусть A – неограниченный замкнутый оператор в гильбертовом пространстве H с плотной областью определения. (Можно рассматривать и банахово пространство.) Он называется *позитивным*, если его резольвентное множество $\rho(A)$ содержит замкнутую отрицательную полуось $\overline{\mathbb{R}}_-$ и в ее точках резольвента $R_A(\lambda)$ удовлетворяет неравенству

$$\|R_A(\lambda)\| \le C(1 + |\lambda|)^{-1} \tag{1}$$

с не зависящей от λ постоянной C. Возможно, это определение Красносельского–Соболевского (1959).

Мы будем пользоваться следующими вариантами этого определения. Пусть Λ – замкнутый угол на комплексной плоскости с вершиной в начале координат. Будет удобно сразу считать $\mathbb{R}_-$ его биссектрисой. Скажем, что оператор A Λ-*позитивен*, если $\rho(A) \supset \Lambda$ и в Λ выполнено неравенство (1). Скажем, что оператор A Λ-*позитивен в ослабленной форме*, если есть такое $\lambda_0 > 0$, что резольвентное множество содержит точки угла Λ с $|\lambda| \ge \lambda_0$ и там выполнено неравенство (1). Если Λ имеет раствор 2φ, то будем писать $\Lambda = \Lambda(\varphi)$.

Так как резольвентное множество всегда открыто, то в случае Λ-позитивности оно содержит некоторую окрестность O_ε начала координат, в которой, конечно, сохраняется оценка вида (1). Кроме того, легко проверяется, что из Λ-позитивности следует Λ_1-позитивность, где Λ_1 – угол немного большего раствора. Проверьте это самостоятельно, используя формулу вида

$$R(\lambda + \Delta\lambda) = R(\lambda)[I - \Delta\lambda R(\lambda)]^{-1}. \tag{2}$$

(Множество выходящих из начала лучей, вдоль которых выполнены оценки вида (1), открыто.) Отметим также, что, имея угол с биссектрисой, идущей вдоль $\mathbb{R}_-$, в котором выполнена оценка вида (1), его всегда можно расширить небольшим сдвигом вправо.

Если оператор A Λ-позитивен в ослабленной форме, то оператор $A + cI$ Λ-позитивен при достаточно большом $c > 0$. Прибавление постоянной c не мешает при рассмотрении, например, поведения собственных значений: весь спектр сдвигается на c вправо.

Ближайшая аналогия в теории эллиптических ПДО – ПДО положительного порядка, эллиптические с параметром в Λ. Они Λ-позитивны в ослабленной форме. Это чрезвычайно важное обстоятельство в теории эллиптических операторов.

Если оператор A – самосопряженный и полуограниченный снизу, то он $\Lambda(\varphi)$-позитивен в ослабленной форме при любом $\varphi < \pi$. Это следует из того, что норма резольвенты в этом случае равна $1/d(\lambda)$, где $d(\lambda)$ – расстояние от точки λ до спектра этого оператора.

Действительно, если $\{e_j\}_1^\infty$ – ортонормированный базис из собственных векторов такого оператора и λ_j – соответствующие собственные значения, то в точках резольвентного множества

$$R_A(\lambda)f = \sum(\lambda - \lambda_j)^{-1}(f, e_j)e_j \tag{3}$$

и в силу равенства Парсеваля

$$\|R_A(\lambda)f\|^2 = \sum |\lambda - \lambda_j|^{-2}|(f, e_j)|^2 \le \sup |\lambda - \lambda_j|^{-2}\|f\|^2. \tag{4}$$

Если оператор самосопряженный, но не полуограниченный, то позитивности можно добиться его умножением на $e^{i\theta}$. Он перестанет быть самосопряженным, но останется нормальным.

Замечание. Известно, что резольвента не может убывать на бесконечности быстрее $|\lambda|^{-1}$. Это вытекает из следующего утверждения. Имеются в виду замкнутые неограниченные операторы с плотной областью определения.

Предложение 1. (Агмон, 1965.) *Пусть* $\{\lambda_n\}$ $(n = 1, 2, \dots)$ – *такая последовательность точек в* $\rho(A)$, *что*

$$|\lambda_n| \to \infty \ \ u \ \ \|R_A(\lambda_n)\| \le C_1|\lambda_n|^{-1}. \tag{5}$$

Тогда $C_1 \ge 1$.

Доказательство. Допустим, что $C_1 < 1$. Положим

$$\varepsilon = (C_1^{-1} - 1)/2. \tag{6}$$

Тогда

$$C_1 = \frac{1}{1 + 2\varepsilon}, \tag{7}$$

и если

$$\lambda = \lambda_n + \Delta\lambda, \ \ \text{где} |\Delta\lambda| \le (1 + \varepsilon)|\lambda_n|, \tag{8}$$

то

$$|\Delta\lambda|\|R_A(\lambda_n)\| < \frac{1 + \varepsilon}{1 + 2\varepsilon} < 1 \tag{9}$$

и существует

$$R(\lambda) = (I - \Delta\lambda R_A(\lambda_n))^{-1} R_A(\lambda_n), \tag{10}$$

причем

$$\|R_A(\lambda)\| \le \frac{1}{1 - \frac{1+\varepsilon}{1+2\varepsilon}} \frac{1}{1+2\varepsilon} \frac{1}{|\lambda_n|} = \frac{1}{\varepsilon|\lambda_n|}. \tag{11}$$

В частности, это неравенство выполнено при

$$|\lambda| < (1+\varepsilon)|\lambda_n| - |\lambda_n| = \varepsilon|\lambda_n|. \tag{12}$$

Отсюда и из (11) при $n \to \infty$ получаем, что резольвента $R_A(\lambda)$ существует и равна 0 при всех λ, что, конечно, невозможно. Значит, $C_1 \ge 1$. $\square$

2. Функции от позитивного оператора. Пусть $0 < \psi < \pi$ и δ – вещественное число. Через $\Gamma = \Gamma(\delta, \psi)$ обозначим контур на комплексной плоскости, состоящий из двух лучей $\{\lambda : \arg(\lambda - \delta) = \pm\psi\}$ с обходом снизу из бесконечности в точку δ и далее в бесконечность вверх. Этот контур делит дополнительную к нему часть плоскости на секторы левее контура и правее его.

Нам понадобятся три контура $\Gamma(\delta_0, \psi)$, $\Gamma(\delta, \psi)$ и $\Gamma(\delta_1, \psi)$ с $\delta_0 < \delta < \delta_1$. Они получаются друг из друга сдвигом вдоль вещественной оси.

Пусть $\Phi(\lambda)$ – функция, голоморфная правее контура $\Gamma(\delta_0, \psi)$ $(0 < \psi < \pi)$ и удовлетворяющая там неравенству

$$|\Phi(\lambda)| \le C_1(1 + |\lambda|)^{-h} \tag{13}$$

с положительным h. При $\delta_0 < \delta$ в точках сектора правее контура $\Gamma(\psi, \delta)$ справедлива формула Коши вида

$$\Phi(\mu) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} \Phi(\lambda)(\mu - \lambda)^{-1} d\lambda, \tag{14}$$

так как этот контур можно заменить окружностью с центром в μ.

По этому образцу определяется функция $\Phi(A)$ от позитивного оператора. Пусть $\delta < \delta_1$ и сектор левее контура $\Gamma(\delta_1, \psi)$ содержится в резольвентном множестве этого оператора, и пусть в нем выполнено неравенство (1). *Полагаем*

$$\Phi(A) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} \Phi(\lambda)(A - \lambda I)^{-1} d\lambda. \tag{15}$$

Так как $\delta_0 < \delta < \delta_1$, то на контуре интегрирования действуют обе оценки (1) и (13). Поэтому интеграл сходится. Подробнее: интеграл понимается как предел интеграла по конечному контуру в смысле нормы в H, а интеграл по конечному контуру – как предел соответствующих интегральных сумм тоже по норме в H.

Если A – оператор с компактной резольвентой, то $\Phi(A)$ – компактный оператор, так как интегральные суммы компактны, а предел последовательности

компактных операторов компактен. В общем же случае оператор $\Phi(A)$ ограничен: его норма легко оценивается с использованием неравенств (1) и (13) (посмотрите сами).

Пусть теперь A – нормальный (например, самосопряженный) оператор с компактной резольвентой и ортонормированным базисом $\{e_j\}_1^\infty$ из собственных векторов, и пусть λ_j – соответствующие им собственные значения. Тогда возможен другой подход к определению функции $\Phi(A)$. Функцию $\Phi(\lambda)$ при этом достаточно считать определенной во всех точках λ_j. *Полагаем*

$$\Phi(A)f = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(\lambda_j)(f, e_j)e_j. \tag{16}$$

Этот оператор ограничен, если $\{\Phi(\lambda_j)\}$ – ограниченная последовательность, и компактен, если она стремится к нулю (так как тогда это предел по операторной норме конечномерных операторов – частных сумм ряда). Если же $\{\Phi(\lambda_j)\}$ – неограниченная последовательность, то область определения оператора $\Phi(A)$ выделяется условием

$$\|\Phi(A)f\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\Phi(\lambda_j)|^2 |(f, e_j)|^2 < \infty. \tag{17}$$

Оператор $\Phi(A)$ нормален, так как имеет ортонормированный базис $\{e_j\}$ из собственных векторов, и является самосопряженным, если все $\Phi(\lambda_j)$ – вещественные числа.

Проверим согласованность определений (15) и (16), например, в следующей ситуации. Пусть функция $\Phi(\lambda)$ голоморфна и удовлетворяет условию (13) при $|\arg\lambda| \le \alpha$, и пусть A – самосопряженный оператор с дискретным спектром $\{\lambda_j\}$, лежащим внутри этого угла, и ортонормированным базисом из (соответствующих λ_j) собственных векторов e_j. Тогда

$$(A - \lambda I)^{-1} e_j = (\lambda - \lambda_j)^{-1} e_j,$$

поэтому из формулы (15) следует, что

$$\Phi(A)e_j = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(0,\alpha)} \Phi(\lambda)(\lambda_j - \lambda)^{-1} d\lambda \, e_j = \Phi(\lambda_j)e_j,$$

а отсюда следует (16).

В отличие от (16) формула (15), как уже отмечалось, непосредственно не применима к определению неограниченных операторов $\Phi(A)$.

В следующем предложении мы рассматриваем операторы, определенные при помощи функций $\Phi_1(\lambda)$, $\Phi_2(\lambda)$ и $\Phi_3(\lambda) = \Phi_1(\lambda)\Phi_2(\lambda)$.

Предложение 2. *Пусть операторы* $\Phi_1(A)$, $\Phi_2(A)$ *и* $\Phi_3(A)$ *определены формулой вида* (15) *для простоты с одним и тем же контуром* $\Gamma_{\delta,\psi}$. *Тогда*

$$\Phi_1(A)\Phi_2(A) = \Phi_3(A). \tag{18}$$

Доказательство. Мы воспользуемся *тождеством Гильберта* для резольвенты $R = R_A$:

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu). \tag{19}$$

Для его проверки следует умножить разность $(A - \mu I) - (A - \lambda I)$ на произведение резольвент.

Пусть оператор $\Phi_1(A)$ задан формулой (15) с контуром $\Gamma = \Gamma(\delta, \psi)$, а оператор $\Phi_2(A)$ – аналогичной формулой с контуром $\Gamma' = \Gamma(\delta', \psi)$, где δ' чуть больше, чем δ. Тогда

$$\Phi_1(A)\Phi_2(A) = (2\pi i)^{-2} \int_\Gamma \Phi_1(\lambda)R(\lambda)\,d\lambda \int_{\Gamma'} \Phi_2(\mu)\frac{d\mu}{\lambda - \mu}$$
$$+ (2\pi i)^{-2} \int_{\Gamma'} \Phi_2(\mu)R(\mu)\,d\mu \int_\Gamma \Phi_1(\lambda)\frac{d\lambda}{\mu - \lambda} = \Phi_3(A),$$

так как

$$\int_{\Gamma'} \Phi_2(\mu)\frac{d\mu}{\lambda - \mu} = 0 \ \ (\lambda \in \Gamma), \quad (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \Phi_1(\lambda)\frac{d\lambda}{\mu - \lambda} = \Phi_1(\mu) \ \ (\mu \in \Gamma'). \quad \square$$

Кроме произведений $\Phi_1(A)\Phi_2(A)$, нам понадобятся некоторые суперпозиции $\Phi_1(\Phi_2(A))$, но их проще будет рассматривать в конкретных случаях.

3. Степени позитивного оператора. Пусть оператор A $\Lambda(\varphi)$-позитивен и $\Gamma = \Gamma(\delta, \psi)$, где $\pi - \varphi < \psi < \pi$ и δ – настолько малое число, что этот контур лежит в $\rho(A)$. При $\operatorname{Re} z < 0$ *полагаем*

$$A^z = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma \lambda^z R_A(\lambda)\,d\lambda, \tag{20}$$

где

$$\lambda^z = \exp[z(\ln|\lambda| + i\arg\lambda)], \quad -\pi < \arg\lambda \le \pi. \tag{21}$$

Это, конечно, частный случай определения (15). Из предложения 2 вытекает

Следствие 3. *При* $\operatorname{Re} z_1 < 0$, $\operatorname{Re} z_2 < 0$

$$A^{z_1}A^{z_2} = A^{z_1+z_2} = A^{z_2}A^{z_1}. \tag{22}$$

Замечания. Забегая вперед (для ориентировки), отметим, что если A – (эллиптический с параметром вдоль $\mathbb{R}_-$) ПДО порядка $m > 0$ с главным символом $a_0(x, \xi)$, то A^z – ПДО порядка $m|\operatorname{Re} z|$ с главным символом $a_0(x, \xi)^z$ (Seeley, 1967). Но мы просмотрим абстрактную ситуацию, так как часто степени оператора нужны в других обстоятельствах. Например, это могут быть степени оператора, отвечающего эллиптической граничной задаче.

В литературе есть другие варианты подхода к степеням оператора.

Мы предположили, что 0 содержится в резольвентном множестве оператора A; это облегчает рассмотрения.

Путь интегрирования в (20) можно преобразовать в контур, составленный из идущих вдоль $\mathbb{R}_-$ лучей $|\{\lambda : |\lambda| \ge \delta, \arg\lambda = \pm\pi\}$ и соединяющей их концы

окружности $\{\lambda : |\lambda| = \delta, |\arg\lambda| \le \pi\}$ с направлением обхода против часовой стрелки. Этот контур обозначим через Γ_δ.

Если $-1 < \operatorname{Re} z < 0$, то в интеграле по Γ_δ вместо Γ можно перейти к пределу при $\delta \to 0$ (несобственный интеграл в нуле сходится) и после замены $|\lambda| = t$ получить представление

$$A^z = -\frac{\sin z\pi}{\pi} \int_0^\infty t^z R_A(-t)dt \quad (-1 < \operatorname{Re} z < 0), \tag{23}$$

так как $\sin \pi z = (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z})/2i$.

Если $z = -k$, где $k \in \mathbb{N}$, то интегралы по входящим в Γ_δ лучам сокращаются и формула принимает вид

$$A^{-k} = (2\pi i)^{-1} \int_{|z|=\delta} \lambda^{-k} R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{24}$$

Предложение 4. *При любом натуральном k оператор* (23) *является обратным к A^k.*

Действительно, в силу (22) это достаточно проверить для $k = 1$. В этом случае

$$A \int_{|z|=\delta} \lambda^{-1} R(\lambda)\, d\lambda = \int_{|z|=\delta} \lambda^{-1} d\lambda\ I + \int_{|z|=\delta} R(\lambda)\, d\lambda = 2\pi i I,$$

так как последний интеграл равен нулю. Аналогично проверяется, что на области определения $D(A)$ оператора A

$$\int_{|z|=\delta} \lambda^{-1} R(\lambda)\, d\lambda \cdot A = 2\pi i I. \quad \square$$

Лекция 6

Мы сначала приведем для удобства несколько формул из лекции 5. Первая – это определение оператора $\Phi(A)$ в случае позитивного оператора A:

$$\Phi(A) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} \Phi(\lambda) R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{15}$$

Вторая – определение оператора $\Phi(A)$ в случае нормального оператора A с дискретным спектром:

$$\Phi(A)f = \sum_{j=1}^{\infty} \Phi(\lambda_j)(f, e_j)e_j. \tag{16}$$

Третья – формула для $\Phi_3(A)$, где $\Phi_3(\lambda) = \Phi_1(\lambda)\Phi_2(\lambda)$:

$$\Phi_3(A) = \Phi_1(A)\Phi_2(A). \tag{18}$$

Четвертая – тождество Гильберта:

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\lambda - \mu)R(\lambda)R(\mu). \tag{19}$$

Пятая – определение A^z при $\operatorname{Re} z < 0$:

$$A^z = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} \lambda^z R_A(\lambda)\, d\lambda, \tag{20}$$

Шестая – формула (18) для степеней с отрицательными действительными частями показателей:

$$A^{z_1} A^{z_2} = A^{z_1+z_2} = A^{z_2} A^{z_1}. \tag{22}$$

Теперь мы хотим распространить определение A^z на все комплексные z.

Заметим, что при любом z с $\operatorname{Re} z < 0$ оператор A^z аннулирует только нулевой вектор, так как это верно для A^{-n} и $A^{-n} = A^{-n-z}A^z$ при $-n < \operatorname{Re} z < 0$.

Используя это обстоятельство, при $\operatorname{Re} z > 0$ *полагаем*[1]

$$A^z = (A^{-z})^{-1}. \tag{25}$$

Это неограниченный, но замкнутый оператор, так как он имеет ограниченный обратный. (Если A – оператор с ограниченным обратным A^{-1}, то из $u_n \to u$, $Au_n \to f$ следует, что $u_n \to A^{-1}f$, $u = A^{-1}f$, $Au = f$. Или так: замкнутость

[1] В (25) мы следуем книге М.А. Красносельский, П.П. Забрейко, Е.И. Пустыльник, П.Е. Соболевский "Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций", Наука, М., 1966. Наше изложение материала, связанного со степенями и экспонентой от оператора, можно сравнивать с изложением в этой книге. Там можно найти некоторые пропущенные далее детали. Но там не все сделано наилучшим образом. Например, не рассмотрены степени с чисто мнимыми показателями.

оператора – это замкнутость его графика, а ограниченный оператор, конечно, замкнут.)

Далее приходится проверять серию мелких предложений, и мы приведем их без подробных доказательств. В случае эллиптических ПДО все это понять проще.

При $\operatorname{Re} z < 0$ область значений $\operatorname{Im} A^z$ оператора A^z плотна в H и сужается с уменьшением $\operatorname{Re} z$.

Действительно, сужение области значений сразу следует из (22). Из (22) также следует, что плотность достаточно проверить при натуральных $z = n$. Это делается индукцией по n (при $n = 1$ она следует из предположения о плотности $D(A)$ в H).

Отсюда вытекает, что при $\operatorname{Re} z > 0$ область определения $D(A^z)$ оператора A^z плотна в H и сужается с ростом $\operatorname{Re} z$.

Равенства (22) остаются справедливыми: при $\operatorname{Re} z_1 < 0$, $\operatorname{Re} z_2 > 0$, $\operatorname{Re}(z_1 + z_2) \neq 0$ на $D(A^{z_2})$; при $\operatorname{Re} z_1 > 0$, $\operatorname{Re} z_2 > 0$ на $D(A^{z_1+z_2})$.

При $0 < \operatorname{Re} z_1 < \operatorname{Re} z_2$ оператор A^{z_1} является замыканием своего сужения на $D(A^{z_2})$. Действительно, A^{z_1} замкнут, а $D(A^{z_2})$ плотна в H и тем более в $D(A^{z_1})$.

При $\operatorname{Re} z < \operatorname{Re} z_1$, $\operatorname{Re} z \neq 0$, $\operatorname{Re} z_1 \neq 0$ оператор A^z является замыканием оператора

$$A^{z_1} A^{z-z_1} = A^{z-z_1} A^{z_1} \tag{26}$$

с областью определения $D(A^{z_1})$ (проверьте сами).

Пусть теперь $0 = \operatorname{Re} z < \operatorname{Re} z_1$. *Определяем* A^z как замыкание оператора (26) с областью определения $D(A^{z_1})$. Проверяется корректность этого определения (независимость от выбора z_1).

При $\operatorname{Re} z = 0$ оператор A^z тоже замкнут и его область определения плотна в H. (Но утверждать, что он ограничен, в общем случае нельзя.) Оператор A^0 очевидным образом совпадает с I.

Соотношение (22) справедливо на $D(A^{z_3})$, если

$$\operatorname{Re} z_3 > \max\{\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Re}(z_1 + z_2)\}. \tag{27}$$

Справедлива формула

$$(A^z)^* = (A^*)^{\overline{z}}. \tag{28}$$

Для $\operatorname{Re} z < 0$ она следует из определения (20) с учетом того, что

$$\rho(A^*) = \{\lambda : \overline{\lambda} \in \rho(A)\} \ \text{ и } \ R_A(\lambda)^* = R_{A^*}(\overline{\lambda}).$$

Для нормального оператора с дискретным спектром, лежащим в угле $\{\lambda : |\arg \lambda| < \varphi < \pi\}$, данные выше определения степени при всех z принимают вид

$$A^z f = \sum_j^\infty \lambda_j^z (f, e_j) e_j \tag{29}$$

в тех же обозначениях, что и в (16) .

Пусть при этом для простоты λ_j вещественны, т.е. оператор самосопряженный. При $\operatorname{Re} z > 0$ область определения оператора A^z выделяется тогда условием

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\lambda_j|^{2\operatorname{Re} z} |(f, e_j)|^2 < \infty. \tag{30}$$

Она не зависит от $\operatorname{Im} z$. При чисто мнимых z это ограниченные операторы.

Предложение 5. *При $\operatorname{Re} z < 0$ оператор A^z является голоморфной функцией от z со значениями в пространстве ограниченных операторов в H. При $\operatorname{Re} z < h$, где $h > 0$, и любом $f \in D(A^{z_1})$, где $\operatorname{Re} z_1 = h$, $A^z f$ – голоморфная функция от z со значениями в H.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из определения (20). Действительно, интеграл абсолютно (т.е. по норме) и равномерно сходится в окрестности фиксированной точки z и допускает дифференцирование под знаком интеграла. Чтобы проверить второе утверждение, достаточно заметить, что $A^z f = A^{z-z_1} g$, где $g = A^{z_1} f$ и $\operatorname{Re}(z - z_1) < 0$. $\square$

Отметим еще, что угол позитивности расширяется при переходе от A к A^s с малым $s > 0$. Подробно останавливаться на этом не будем. Проверяется, что резольвента оператора A^s выражается формулой типа (15):

$$R_{A^s}(\mu) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} (\lambda^s - \mu)^{-1} R_A(\lambda) d\lambda. \tag{31}$$

Ясно, что при $0 < s < 1$ она определена в более широком угле, чем $R_A(\lambda)$.

4. Экспонента e^{-tA}. Пусть оператор A $\Lambda(\pi/2)$-позитивен в ослабленной форме. Мы знаем, что угол позитивности можно немного расширить. *Полагаем* при $t > 0$

$$e^{-tA} = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} e^{-t\lambda} R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{32}$$

Здесь $\Gamma = \Gamma(\delta, \varphi)$, где φ чуть меньше $\pi/2$, а δ выбирается так, что весь спектр оператора лежит правее контура. Считаем, что на контуре выполнена оценка из определения позитивности, т.е. норма резольвенты $R_A(\lambda)$ убывает как $|\lambda|^{-1}$. Функция $e^{-t\lambda}$ является, конечно, целой аналитической функцией от λ, и на контуре ее модуль экспоненциально убывает. Это новый частный случай формулы (15).

Оператор e^{-tA} всегда ограничен при любом $t > 0$. Если резольвента $R_A(\lambda)$ компактна, то оператор e^{-tA} компактен.

Заметим, что функцию e^{-tA} можно, используя формулу (32), голоморфно продолжить по t в некоторую угловую окрестность луча $\mathbb{R}_+$: там можно дифференцировать по t под знаком интеграла. При этом, так как

$$-\lambda R_A(\lambda) = (A - \lambda I) R_A(\lambda) - A R_A(\lambda) = I - A R(\lambda)$$

(и это ограниченный оператор), то

$$(e^{-tA})' = -A e^{-tA}. \tag{33}$$

Для t_1, t_2 из этого угла в силу формулы (18)

$$e^{-t_1 A} e^{-t_2 A} = e^{-(t_1+t_2)A}. \tag{34}$$

В частности, формулы (33) и (34) верны при положительных t и t_j.

Остановимся на связи экспоненты с задачей Коши

$$u'(t) + Au(t) = 0 \quad (t > 0), \tag{35}$$

$$u(0) = u_0. \tag{36}$$

Предложение 6. *При любом $u_0 \in H$ функция $u(t) = e^{-tA}u_0$ является решением задачи* (35), (36).

Доказательство. Уравнение (35) удовлетворяется в силу (34). Немного сложнее проверяется начальное условие, так как убывание нормы резольвенты не обеспечивает сходимости интеграла (32) при $t = 0$.

Пусть сначала u_0 принадлежит области определения $D(A)$ оператора A. Тогда $u_0 \in D(A - \mu I)$, где в качестве μ возьмем точку из $\rho(A)$ на $\mathbb{R}_-$ левее δ. Имеем $u_0 = R(\mu)v$ при некотором $v \in H$. В силу тождества Гильберта (19),

$$R(\lambda)R(\mu)v = (\lambda - \mu)^{-1}[R(\lambda) - R(\mu)]v.$$

Интеграл

$$\int_\Gamma e^{-tA}(\lambda - \mu)^{-1} d\lambda$$

равен нулю. Поэтому

$$u(t) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma e^{-t\lambda} R(\lambda)(\lambda - \mu)^{-1} d\lambda\, v.$$

Выигрыш состоит в том, что под знаком интеграла появился множитель $(\lambda - \mu)^{-1}$. При $t \to +0$ функция $u(t)$ стремится к

$$u(0) = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma R(\lambda)(\lambda - \mu)^{-1} d\lambda\, v. \tag{37}$$

Вычисляя этот интеграл через вычет подинтегрального выражения в точке μ, получаем, что $u(0) = R(\mu)v = u_0$. Точнее, используется следующий прием. Умножаем обе части равенства (37) скалярно на произвольный вектор w. Числовая функция $(R(\lambda)v, w)$ голоморфна и убывает как $|\lambda|$ на контуре и влево от него, и мы получаем, вычисляя соответствующий интеграл через вычет, что

$$(u(0), w) = (R(\mu)v, w) = (u_0, w).$$

Отсюда равенство $u(0) = u_0$ следует ввиду произвольности w.

Чтобы распространить результат на все $u_0 \in H$, достаточно проверить равномерную по t при малых $t > 0$ ограниченность оператора e^{-tA} (что позволит воспользоваться аппроксимацией произвольного u_0 элементами из $D(A)$). Для

этого будем менять δ, $\delta \to -\infty$. Как мы увидим, надо будет взять $|\delta| = 1/t$. Пока предположим, что $\delta < 0$.

На Γ мы имеем грубую оценку $|\lambda| \geq |\delta| \sin\varphi$ и, значит,

$$(|\delta| + \eta)|\lambda|^{-1} \leq C_1,$$

где $\eta = |\operatorname{Im}\lambda|$ и $C_1 = (\sin\varphi)^{-1} + 1$. Поэтому на Γ

$$\|R(\lambda)\| \leq C|\lambda|^{-1} \leq CC_1(|\delta| + \eta)^{-1}$$

и

$$\|e^{-tA}\| \leq CC_1 e^{-\delta t} \int_\Gamma |e^{-(\lambda-\delta)t}|(|\delta| + \eta)^{-1}|d\lambda| = C_2 e^{-\delta t} \int_0^\infty e^{-C_3 t\eta}(|\delta| + \eta)^{-1} d\eta, \tag{38}$$

где $C_2 = 2CC_1(\sin\varphi)^{-1}$ и $C_3 = (\sin\varphi)^{-1}$. Теперь полагаем $|\delta| = 1/t$ и $\eta = \widetilde{\eta}/t$, где $\widetilde{\eta}$ – новая переменная, по которой мы интегрируем. Правая часть в (38) оказывается не зависящей от t. $\square$

Уравнение (35) можно рассматривать как абстрактный аналог уравнения теплопроводности, а условие $\Lambda(\pi/2)$-позитивности оператора A в ослабленной форме называть *условием параболичности* этого уравнения. (Годится оператор $A = -\Delta$ на замкнутом многообразии.)

Замечание о терминологии. Экспонента e^{-tA} не определена у нас при $t = 0$: как уже было сказано, убывание резольвенты не обеспечивает сходимости интеграла (32) при $t = 0$. Но мы положим $e^{-0A} = I$. Теперь экспонента определена на замкнутой полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$. Она обладает полугрупповым свойством (34). При любом $t > 0$ и любом $w \in H$ функция $e^{-tA}w$ непрерывна в H (по норме в этом пространстве). В предложении 6 мы фактически доказали, что непрерывность сохраняется при $t = 0$. Это означает, что мы имеем *сильно непрерывную полугруппу*. А поскольку она голоморфно продолжается с сохранением полугруппового свойства (34) в некоторую угловую окрестность луча $\mathbb{R}_+$, это *голоморфная полугруппа*. Оператор A является *производящим оператором* этой полугруппы.

Если угол в условии позитивности мал, то может быть полезным переход к малой положительной степени A^s оператора A для расширения угла позитивности до $\pi/2$.

Если A – нормальный оператор с дискретным спектром, лежащим, скажем, в угле $\{\lambda : |\arg\lambda| \leq \varphi < \pi/2\}$, то в тех же обозначениях, что и в (16),

$$e^{-tA} = \sum_1^\infty e^{-t\lambda_j}(f, e_j)e_j. \tag{40}$$

Лекция 7

Снова повторим нужные формулы:

$$\Phi(A) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} \Phi(\lambda) R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{15}$$

Для $\operatorname{Re} z < 0$

$$A^z = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} \lambda^z R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{20}$$

Для $t > 0$

$$e^{-tA} = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} e^{-t\lambda} R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{32}$$

5. Связи между функциями $R_A(\lambda)$, A^{-z} и e^{-tA}. В теории эллиптических ПДО каждая из этих функций в отдельности интенсивно изучалась в литературе. Формулы, которые мы здесь обсудим, в теории ПДО позволяют "пересчитывать" результаты, полученные для одной из этих функций от A, в результаты для других. Две формулы мы уже имеем: это определения степени и экспоненты через резольвенту.

Будем считать, что оператор A является $\Lambda(\varphi)$-позитивным при $\varphi < \varphi_0$ и что φ_0 здесь нельзя увеличить.

Предложение 7. *При $0 < c < 1$ для точек μ внутри угла позитивности*

$$R_A(\mu) = \frac{1}{2i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{(-\mu)^{z-1}}{\sin \pi z} A^{-z} dz, \tag{40}$$

где $(-\mu)^{z-1}$ – голоморфная функция от (z,μ), совпадающая с $e^{(z-1)\ln|\mu|}$ при $\mu \in \mathbb{R}_-$.

Убедимся сначала в сходимости этого интеграла. Фиксируя μ в угле позитивности, возьмем контур $\Gamma = \Gamma(\delta,\psi)$, определяющий A^{-z} и такой, что точка μ лежит левее этого контура. Мы имеем

$$|(-\mu)^{z-1}| \le |\mu|^{c-1} \exp(|\arg(-\mu)| \cdot |\operatorname{Im} z|), \tag{41}$$

$$|(\sin \pi z)^{-1}| \le C_1 \exp(-\pi |\operatorname{Im} z|), \tag{42}$$

$$\|A^{-z}\| \le \int_\Gamma |\lambda^{-z}| \|R_A(\lambda)\| |d\lambda|$$

$$\le C_2 \exp(\psi |\operatorname{Im} z|) \int_\Gamma |\lambda|^{-c} (1+|\lambda|)^{-1} |d\lambda| = C_3 \exp(\psi |\operatorname{Im} z|), \tag{43}$$

где C_j не зависят от z. Из этих оценок видна сходимость интеграла (40), так как $\arg(-\mu) + \psi < \pi$.

Объясним теперь, откуда взялась формула (40). Известно, что при $0 < t < 1$

$$(1+t)^{-1} = \frac{1}{2i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{t^{z-1}}{\sin \pi z} dz. \tag{44}$$

Эта формула проверяется следующим образом. Нужно сдвигать линию интегрирования параллельно себе вправо, перепрыгивая через нули синуса. Это можно делать, вычисляя интеграл по замкнутому контуру через вычеты в нулях синуса, так как в любой вертикальной полосе $\{z : 0 < c_0 \le \operatorname{Re} z \le c_1\}$ подинтегральное выражение быстро убывает по модулю при $|\operatorname{Im} z| \to \infty$ равномерно по $\operatorname{Re} z$ (так как модуль синуса растет экспоненциально, см. (42)). Поэтому правая часть в (43) при любом натуральном N равна

$$-\pi \sum_{l=1}^{N} \operatorname{Res}_{z=l} \frac{t^{z-1}}{\sin \pi z} + \frac{1}{2i} \int_{\operatorname{Re} z = c+N} \frac{t^{z-1}}{\sin \pi z}\, dz.$$

Здесь сумма с множителем $-\pi$ совпадает с $1 - t + \cdots + (-1)^{N-1} t^{N-1}$, а интеграл не превосходит по модулю $C_4 t^{c+N-1}$ и потому стремится к нулю при $N \to \infty$.

Подставим теперь в (44) $t = -\mu/\lambda$, считая сначала, что числитель и знаменатель – положительные числа и дробь меньше 1. Получим

$$(\lambda - \mu)^{-1} = \frac{1}{2i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{(-\mu)^{z-1} dz}{\lambda^z \sin \pi z} \quad (0 < c < 1). \tag{45}$$

Формула (40) формально получается отсюда подстановкой A вместо λ. Формула (45) сейчас понадобится нам с $\lambda \in \Gamma$ и произвольной точкой μ, лежащей левее контура γ. На эти значения λ и μ она распространяется аналитическим продолжением (при котором $\lambda \ne \mu$ и $\lambda,\ -\mu \notin \overline{\mathbb{R}}_-$) .

Доказательство предложения 7. Запишем резольвенту в точке μ формулой Коши (это формула (31) из лекции 6 с $s = 1$)

$$R_A(\mu) = (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} (\lambda - \mu)^{-1} R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{46}$$

Теперь подставим (45) в (46) и поменяем порядок интегрирования (это возможно ввиду абсолютной сходимости повторных интегралов):

$$R_A(\mu) = \frac{1}{2i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{(-\mu)^{z-1}}{\sin \pi z} (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma} \lambda^{-z} R_A(\lambda)\, d\lambda\, dz. \tag{47}$$

Остается воспользоваться формулой вида (20) для A^{-z}. $\square$

Предложение 8. *Пусть $\varphi_0 > \pi/2$. Тогда при $t > 0$, $c > 0$*

$$e^{-tA} = (2\pi i)^{-1} \int_{\operatorname{Re} z = c} t^{-z} \Gamma(z) A^{-z} dz. \tag{48}$$

Здесь $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера. С этой формулой мы разберемся по тому же плану, что и с (40).

Сначала проверим абсолютную сходимость интеграла справа. Считая, что оператор A^{-z} определен формулой вида (20) с ψ чуть меньше $\pi/2$, имеем согласно (43)

$$\|A^{-z}\| \le C_1 \exp(\psi |\operatorname{Im} z|),$$

и достаточно проверить, что

$$|\Gamma(z)| \le C_2 \exp(-\omega |\operatorname{Im} z|) \tag{49}$$

при любом $\omega \in (0, \pi/2)$, где $C_2 = C_2(\omega)$ не зависит от $\operatorname{Im} z$. В стандартной формуле для Γ-функции

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty u^{z-1} e^{-u} du \quad (\operatorname{Re} z > 0)$$

сделаем замену $u = e^\sigma$. Получим, полагая $z = x + iy$,

$$\Gamma(x+iy) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\sigma x - e^\sigma} e^{i\sigma y} d\sigma. \tag{50}$$

Эта формула показывает, что $(2\pi)^{-1}\Gamma(x+iy)$ – преобразование Фурье $F^{-1}_{\sigma\to y}$ от функции $e^{\sigma x - e^\sigma}$, принадлежащей пространству Шварца $S(\mathbb{R})$. Путь интегрирования можно сдвинуть на любую горизонтальную прямую в полосе $\{\sigma : |\operatorname{Im}\sigma| < \pi/2\}$. При этом за знак интеграла выносится $e^{-y \operatorname{Im}\sigma}$. Выбирая $\operatorname{Im}\sigma$ одного знака с y, получаем нужную оценку (49). Итак, интеграл справа в (48) абсолютно сходится.

Теперь выведем аналогичную (48) формулу для $e^{-t\lambda}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$:

$$e^{-t\lambda} = (2\pi i)^{-1} \int_{\operatorname{Re} z = c} (t\lambda)^{-z} \Gamma(z)\, dz. \tag{51}$$

Здесь $t\lambda$ можно заменить одной буквой u:

$$e^{-u} = (2\pi i)^{-1} \int_{\operatorname{Re} z = c} u^{-z} \Gamma(z)\, dz. \tag{52}$$

Проверим формулу (52).

Используя формулу обращения преобразования Фурье, получаем из (50)

$$e^{\sigma x - e^\sigma} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma(x+iy) e^{-i\sigma y} dy.$$

Заменим здесь e^σ на u и поделим обе части на u^x; получим

$$e^{-u} = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} u^{-(x+iy)} \Gamma(x+iy)\, dy, \quad y > 0,$$

а это и есть формула (52). Здесь пока $u > 0$, но, используя оценки (43),(49), можем продолжить правую часть голоморфно на u с $\operatorname{Re} u > 0$. Подставляя $u = t\lambda$, получаем (51).

Доказательство предложения 8. Подставим (51) в формулу (32). Переставляя интегралы (можно проверить, что это возможно в силу абсолютной сходимости повторных интегралов), получаем

$$e^{-tA} = (2\pi i)^{-1} \int_{\operatorname{Re} z = c} t^{-z} \Gamma(z) (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma(\delta,\psi)} \lambda^{-z} R_A(\lambda)\, d\lambda\, dz.$$

Остается воспользоваться формулой (20). □

Приведем еще три формулы. Первые две есть в книге Красносельского с соавторами, упомянутой на прошлой лекции; их несложно проверить самостоятельно.

Предложение 9. *При* $\varphi_0 > \pi/2$ *и* $\operatorname{Re}\mu \le 0$

$$R_A(\mu) = \int_0^\infty e^{-tA} e^{\mu t} dt = \int_0^\infty e^{-t(A-\mu I)} dt. \tag{53}$$

Предложение 10. *При* $\varphi_0 > \pi/2$, $\operatorname{Re} z > 0$

$$A^{-z} = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty t^{z-1} e^{-tA} dt. \tag{54}$$

Эти две формулы напоминают известные формулы для преобразования Лапласа от экспоненты и степени:

$$\int_0^\infty e^{-pt} e^{\mu t} dt = \frac{1}{p-\mu} \quad \text{и} \quad \int_0^\infty e^{-pt} t^n dt = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

Третья формула – обобщение формулы (40):

Предложение 11. *При натуральном* q *и* $0 < c < q$ *и* μ *из угла позитивности*

$$[R_A(\mu)]^q = \frac{1}{2i} \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{(z-1)\dots(z-q+1)(-\mu)^{z-q}}{\sin \pi z} A^{-z} dz. \tag{55}$$

В доказательстве проверяется и используется формула типа (15) для степени резольвенты

$$[R_A(\mu)]^q = (2\pi i)^{-1} \int_\Gamma (\lambda-\mu)^{-q} R_A(\lambda)\, d\lambda. \tag{56}$$

Контур можно заменить малой окружностью с центром в μ. Подставим сюда выражение для резольвенты из (40) с заменой μ на λ. Меняя местами интегралы, получаем

$$[R_A(\mu)]^q = \frac{1}{2i} \int_{\operatorname{Re} z = c} \frac{1}{\sin \pi z} A^{-z} dz \, \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda-\mu|=r} (\lambda-\mu)^{-q} (-\lambda)^{z-1} d\lambda.$$

Вычисляя интеграл через вычет подинтегральной функции в точке $\lambda = \mu$, приходим к формуле (54) пока с $0 < c < 1$. Но подинтегральное выражение голоморфно по z в полосе $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < q\}$. Поэтому c можно считать лежащим между 0 и q.

На ближайших лекциях мы будем заниматься изучением резольвенты $R_A(\lambda)$ позитивного эллиптического оператора A положительного порядка $m > n$ на

замкнутом многообразии M. При условии $m > n$ резольвента, как мы увидим, является интегральным оператором

$$R_A(\lambda)f(x) = \int K(x,y,\lambda)f(y)\,dy$$

с непрерывным ядром $K(x,y,\lambda)$. Цель будет состоять в получении асимптотической формулы для *следа ядра резольвенты*

$$\operatorname{tr} R_A(\lambda) = \int K(x,x,\lambda)\,dx$$

при $\lambda \to -\infty$. В случае, когда A самосопряженный оператор с положительными собственными значениями, мы выведем из нее асимптотическую формулу для собственных значений оператора A при помощи тауберовой теоремы.

Приближением к резольвенте является параметрикс. Главный член параметрикса отвечает символу

$$\frac{1}{a_0(x,\xi)-\lambda}\,, \tag{1}$$

где $a_0(x,\xi)$ – главный символ ПДО A. Он, как мы помним, определен глобально как функция на кокасательном расслоении. Мы сейчас для простоты предполагаем, что λ отрицательно (на самом деле можно рассматривать большие по модулю λ из угла позитивности). Указанная дробь нуждается в сглаживании при малых ξ или малых (ξ,λ). Но мы сейчас составляем только грубый план действий. Если $m > n$, то ПДО

$$B(\lambda)u(x) = (2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}[a_0(x,\xi)-\lambda]^{-1}u(u)\,dyd\xi \tag{2}$$

в $\mathbb{R}^n$ является интегральным оператором

$$\int K_0(x,y,\lambda)u(y)\,dy \tag{3}$$

с непрерывным ядром, которое имеет вид

$$K_0(x,y,\lambda) = (2\pi)^{-n}\int e^{i(x-y)\cdot\xi}[a_0(x,\xi)-\lambda]^{-1}d\xi, \tag{4}$$

этот интеграл абсолютно сходится (на бесконечности). Полагая $y = x$ и интегрируя, а затем делая подстановку $\xi = (-\lambda)^{1/m}$, получаем уже в случае многообразия M вместо $\mathbb{R}^n$

$$\int_M K_0(x,x,\lambda)dx = (2\pi)^{-n}\iint_{T*M}[a_0(x,\xi)-\lambda]^{-1}d\xi = c(-\lambda)^{n/m-1}, \tag{5}$$

где

$$c = (2\pi)^{-n}\iint_{T*M}\frac{1}{a_0(x,\eta)+1}\,d\eta. \tag{6}$$

Поэтому

$$\operatorname{tr} R_A(\lambda) = c(-\lambda)^{n/m-1} + o((-\lambda)^{n/m-1}) \quad (\lambda \to -\infty). \tag{7}$$

Это и есть (простейшая) асимптотическая формула для следа ядра резольвенты.

Пусть теперь A –самосопряженный ПДО с положительными собственными значениями. Если $\{e_j(x)\}_1^\infty$ – ортонормированный базис из его собственных функций, а λ_j – соответствующие собственные значения, то

$$R_A(\lambda)u = \sum \frac{1}{\lambda_j - \lambda}(u, e_j)e_j, \tag{8}$$

и формально это интегральный оператор на M

$$\int_M K(x, y, \lambda)u(y)\, dy \tag{9}$$

с ядром

$$K(x, y, \lambda) = \sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_j - \lambda} e_j(x)\overline{e_j(y)}. \tag{10}$$

Так как ядро непрерывно, а числовые множители $1/(\lambda_j - \lambda)$ положительны, то уже неформально, в силу теоремы Мерсера, получаем, что этот ряд сходится равномерно. Полагая $x = y$ и интегрируя по многообразию, получаем

$$\operatorname{tr} R_A(\lambda) = \sum \frac{1}{\lambda_j - \lambda} = \operatorname{tr} R_A(\lambda). \tag{11}$$

Эта формула объясняет спктральный смысл следа ядра резольвенты. Ввиду конечности этой суммы резольвента – *ядерный оператор.*

Сопоставляя эту формулу с (7), получаем

$$\sum \frac{1}{\lambda_j - \lambda} = c(-\lambda)^{n/m-1} + o((-\lambda)^{n/m-1}). \quad (\lambda \to -\infty). \tag{12}$$

На самом деле получится более точная оценка остатка.

Теперь применяется тауберова теорема Харди–Литтльвуда (для преобразования Стильтьеса). Из (12) вытекает асимптотическая формула для λ_j:

$$\lambda_j = d\, j^{\frac{m}{n}} + o(j^{\frac{m}{n}}). \tag{13}$$

Постоянная d выражается через c. Здесь можно бороться за улучшение оценки остатка, но (13) – это принципиальный весьма общий результат в спектральной теории эллиптических операторов.

Кроме того, получается асимптотическое разложение следа ядра резольвенты $R(\lambda)$ по убывающим степеням переменной $-\lambda$ без предположения о самосопряженности оператора. И этот след тоже имеет спектральный смысл.

Если условие $m > n$ не выполнено, то в случае самосопряженного оператора с положительными собственными значениями следует перейти к достаточно высокой натуральной степени оператора A. Если же самосопряженности нет, а есть только позитивность, то при таком переходе ее можно потерять и вместо этого надо рассматривать степень резольвенты.

Если оператор дифференциальный, то непосредственно получается бесконечное асимптотическое разложение для следа резольвенты или ее степени. Если же оператор псевдодифференциальный, то непосредственно получается только конечное асимптотическое разложение, что связано с рамками исчисления Грубб для ПДО, эллиптических с параметром. Чтобы получить полное асимптотическое разложение, надо сначала изучить аналитическое продолжение следа оператора A^{-z} и затем использовать выражение для резольвенты через степень оператора.

Лекция 8

4. Функции от эллиптических операторов

1. Уточнение теоремы вложения для соболевских пространств. Пусть $u(x)$ – функция из $H^s(\mathbb{R}^n)$, где $s > n/2$. Мы знаем, что она непрерывна. Точнее, она непрерывна, если ее отождествить с

$$(2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} v(\xi)\, d\xi, \tag{1}$$

где $v = Fu$. Функция (1) не имеет разрывов, которые могли быть у исходной функции. Условимся при $s > n/2$ отождествлять $u(x)$ с (1).

Сейчас мы уточним свойства этой функции.

Предложение 1. *При $s > n/2$ справедливы неравенства*

$$|u(x)| \le C_1 \|u\|_s^{n/2s} \|u\|_0^{1-n/2s} \tag{2}$$

и

$$|u(x) - u(\widetilde{x})| \le C_2 |x - \widetilde{x}|^{\mu} \|u\|_s, \tag{3}$$

где постоянные C_j не зависят от функций и μ – любое положительное число, меньшее $\min(s - n/2, 1)$.

Доказательство. Имеем

$$|u(x)| \le (2\pi)^{-n} \int |v(\xi)| (r^2 + |\xi|^2)^{s/2} (r^2 + |\xi|^2)^{-s/2} d\xi.$$

В правую часть теперь включен параметр r. Используя неравенство Шварца, получаем

$$|u(x)|^2 \le (2\pi)^{-2n} \int |v(\xi)|^2 (r^2 + |\xi|^2)^s d\xi \int (r^2 + |\xi|^2)^{-s} d\xi. \tag{4}$$

В первом интеграле справа воспользуемся очевидными неравенствами

$$(r^2 + |\xi|^2)^s \le 2^s (r^{2s} + |\xi|^{2s}) \le 2^s [r^{2s} + (1 + |\xi|^2)^s].$$

Во втором сделаем подстановку $\xi = r\eta$. Получим

$$|u(x)|^2 \le c_1 \big[r^{2s} \|u\|_0^2 + \|u\|_s^2\big] r^{n-2s} = c_1 \big[r^n \|u\|_0^2 + r^{n-2s} \|u\|_s^2\big], \tag{5}$$

где

$$c_1 = (2\pi)^{-2n} 2^s \int (1 + |\eta|^2)^{-s} d\eta.$$

Теперь мы подставим в (5)

$$r = \left(\frac{\|u\|_s}{\|u\|_0} \right)^{1/s}. \tag{6}$$

Получим неравенство

$$|u(x)|^2 \le 2c_1 \|u\|_s^{n/s} \|u\|_0^{2-n/s},$$

эквивалентное (2). Выбор r сделан из следующих соображений: функция $f(r) = a^2 r^n + b^2 r^{n-2s}$ достигает минимума при $r = c_0 (b/a)^{1/s}$, где c_0 не зависит от a и b. Имеется в виду точка, в которой $f'(r) = 0$.

Чтобы получить неравенство (3), мы напишем

$$u(x) - u(\widetilde{x}) = (2\pi)^n \int [e^{ix\cdot\xi} - e^{i\widetilde{x}\cdot\xi}] v(\xi)\, d\xi$$

и снова воспользуемся неравенством Шварца:

$$|u(x) - u(\widetilde{x})|^2 \le (2\pi)^{-2n} \int |v(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^s d\xi \int |e^{ix\cdot\xi} - e^{i\widetilde{x}\cdot\xi}|^2 (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi. \quad (7)$$

Далее,

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha, \quad |e^{i\alpha} - e^{i\beta}|^2 \le 2|\alpha - \beta|^2$$

в силу теоремы Лагранжа, применяемой к косинусу и синусу. Поэтому

$$|e^{ix\cdot\xi} - e^{i\widetilde{x}\cdot\xi}|^2 \le 2|x - \widetilde{x}|^2 |\xi|^2. \quad (8)$$

Если $2 - 2s < -n$, сразу получается неравенство, эквивалентное (3), с $\mu = 1$, т.е. даже чуть лучше, чем в формулировке. Если $2 - 2s > -n$, то немного загрубим (8) и при $2\mu - 2s < -n$ напишем

$$|e^{ix\cdot\xi} - e^{i\widetilde{x}\cdot\xi}|^2 \le 4|x - \widetilde{x}|^{2\mu} |\xi|^{2\mu}, \quad (9)$$

и это дает нам

$$|u(x) - u(\widetilde{x})|^2 \le 4(2\pi)^{-2n} \int |\xi|^{2\mu} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi\, |x - \widetilde{x}|^{2\mu} \|u\|_s^2,$$

что эквивалентно (3). □

На многообразии M оценка типа (2) получается как следствие (например, при помощи разбиения единицы), а оценка типа (3) получается для достаточно близких точек x и $\widetilde{x}$ в локальных координатах.

2. Теоремы Агмона об интегральном представлении операторов отрицательного порядка. Здесь мы докажем две теоремы (Agmon, 1965).

Теорема 2. *Пусть T – ограниченный оператор из $H^0(\mathbb{R}^n)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > n/2$. Тогда T – интегральный оператор,*

$$Tu(x) = \int K(x,y) u(y)\, dy, \quad (10)$$

где функция $K(x,y)$ от y принадлежит $H^0(\mathbb{R}^n)$ при каждом x. При этом

$$\left[\int |K(x,y)|^2 dy\right]^{1/2} \le C_1 \|T\|_{0,s}^{n/2s} \|T\|_{0,0}^{1-n/2s}, \tag{11}$$

$$\left[\int |K(x,y)-K(\widetilde{x},y)|^2 dy\right]^{1/2} \le C_2 |x-\widetilde{x}|^{\mu} \|T\|_{0,s}, \tag{12}$$

с любым μ, удовлетворяющим неравенствам $0<\mu<\min(s-n/2,1)$; C_1 и C_2 – постоянные из неравенств (2) и (3).

Аналогичные утверждения справедливы для оператора на компактном многообразии M. В этом случае

$$\left[\iint_{M\times M} |K(x,y)|^2 dx\, dy\right]^{1/2} \le C_3 \|T\|_{0,s}^{n/2s} \|T\|_{0,0}^{1-n/2s}, \tag{13}$$

где постоянная C_3 не зависит от оператора.

Интегральные операторы с квадратично интегрируемыми ядрами называются *операторами Гильберта–Шмидта.*

Доказательство теоремы. Сначала рассмотрим оператор T в $\mathbb{R}^n$. Пусть $u\in H^0(\mathbb{R}^n)$ и $v=Tu$, эту функцию отождествим с

$$(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}(FTu)(\xi)\,d\xi.$$

Тогда $v(x)$ при фиксированном x – линейный непрерывный функционал над функциями $u\in H^0(\mathbb{R}^n)$. Поэтому справедлива формула (10), где функция $K(x,y)$ принадлежит $H^0(\mathbb{R}^n)$ по y при каждом x.

Фиксируя x, рассмотрим $u_x(y)=\overline{K(x,y)}$ как функцию от y. Полагая в (10) $u=u_x$, получаем из (2)

$$\|u_x\|_0^2 = (Tu_x)(x) \le C_1\|Tu_x\|_s^{n/2s}\|Tu_x\|_0^{1-n/2s} \le C_1\|T\|_{0,s}^{n/2s}\|T\|_{0,0}^{1-n/2s}\|u_x\|_0.$$

Сокращая на $\|u_x\|_0$ слева и справа, получаем (11).

Фиксируя теперь x и $\widetilde{x}$, положим $u_{x,\widetilde{x}}(y)=u_x(y)-u_{\widetilde{x}}(y)$. Полагая в (10) $u=u_{x,\widetilde{x}}$, получаем из (3)

$$\|u_{x,\widetilde{x}}\|_0^2 = (Tu_{x,\widetilde{x}})(x)-T(u_{x,\widetilde{x}})(\widetilde{x}) \le C_2|x-\widetilde{x}|^{\mu}\|Tu_{x,\widetilde{x}}\|_s \le C_2|x-\widetilde{x}|^{\mu}\|T\|_{0,s}\|u_{x,\widetilde{x}}\|_0.$$

Сокращая на $\|u_{x,\widetilde{x}}\|$ слева и справа, получаем (12).

Для M вместо $\mathbb{R}^n$ все повторяется. Неравенство (13) в этом случае очевидным образом получается из (11). □

Замечание. Если удовлетвориться менее точной, чем (11), оценкой

$$\left[\int |K(x,y)|^2 dy\right]^{1/2} \le C\|T\|_{0,s}$$

то в уточнении (2) теоремы вложения нет нужды.

Теорема 3. *Пусть T – ограниченный линейный оператор из $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > n/2$. Тогда T – интегральный оператор* (10) *в $H^0(\mathbb{R}^n)$, и при этом*

$$|K(x,y)| \le C_4 \|T\|_{-s,s}, \tag{14}$$

$$|K(x,y) - K(\widetilde{x},y)| \le C_5 |x-\widetilde{x}|^\mu \|T\|_{-s,s}, \tag{15}$$

$$|K(x,y) - K(x,\widetilde{y})| \le C_5 |y-\widetilde{y}|^\mu \|T\|_{-s,s} \tag{16}$$

с любым μ, удовлетворяющим неравенствам $0 < \mu < \min(s - n/2, 1)$; здесь $C_4 = C_1^2$, $C_5 = C_1 C_2$. В частности, ядро $K(x,y)$ равномерно непрерывно.

Аналогичные результаты справедливы на M.

Доказательство. Пусть $u \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $v = Tu \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Имеем в силу (2)

$$|v(x)| \le C_1 \|v\|_s \le C_1 \|T\|_{-s,s} \|u\|_{-s}, \tag{17}$$

и в силу (3)

$$|v(x) - v(\widetilde{x})| \le C_2 |x-\widetilde{x}|^\mu \|v\|_s \le C_2 |x-\widetilde{x}|^\mu \|T\|_{-s,s} \|u\|_{-s}. \tag{18}$$

Фиксируя x, рассмотрим $v(x)$ как непрерывный линейный функционал над $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Его можно записать в виде

$$v(x) = Tu(x) = \langle K(x,y), u(y) \rangle = \int K(x,y) u(y)\, dy, \tag{19}$$

где правое равенство можно писать при $u \in H^0(\mathbb{R}^n)$ и $K(x,y)$ – функция из $H^s(\mathbb{R}^n)$ по y. При этом

$$|K(x,y)| \le C_1 \|K(x,y)\|_s = C_1 \sup \frac{|v(x)|}{\|u\|_{-s}} \le C_1^2 \sup \frac{\|v\|_s}{\|u\|_{-s}} = C_1^2 \|T\|_{-s,s}. \tag{20}$$

Это неравенство (14). Из (3) и (20) получаем

$$|K(x,y) - K(x,\widetilde{y})| \le C_2 |y-\widetilde{y}|^\mu \|K(x,y)\|_s \le C_1 C_2 |y-\widetilde{y}|^\mu \|T\|_{-s,s}.$$

Это неравенство (16).

Далее, при фиксированных x и $\widetilde{x}$

$$v(x) - v(\widetilde{x}) = \langle K(x,y) - K(\widetilde{x},y), u(x) \rangle = \int [K(x,y) - K(\widetilde{x},y)] u(y)\, dy \tag{21}$$

снова есть линейный непрерывный функционал над $H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Последнее равенство можно писать при $u \in H^0(\mathbb{R}^n)$. Действуя как в (20), и используя (18), получаем

$$\begin{aligned} |K(x,y) - K(\widetilde{x},y)| &\le C_1 \|K(x,y) - K(\widetilde{x},y)\|_s = C_1 \sup \frac{|v(x) - v(\widetilde{x})|}{\|u\|_{-s}} \\ &\le C_1 C_2 |x-\widetilde{x}|^\mu \|T\|_{-s,s}. \end{aligned}$$

Это неравенство (15).

Получите сами результат на компактном многообразии M. $\square$

Следствие 1. *Если ПДО A на M имеет порядок $m < -n/2$, то это интегральный оператор Гильберта–Шмидта. А если $m < -n$, то его ядро непрерывно.*

Следствие 2. *Если позитивный ПДО A на M имеет порядок $m > n/2$, то его резольвента – оператор Гильберта–Шмидта. А если $m > n$, то ее ядро непрерывно.*

Эти результаты можно извлечь и из анализа параметрикса, но приятнее сразу получить их из теорем Агмона, которые интересны и сами по себе.

У Агмона есть еще такой вариант теоремы 3: если оператор T и сопряженный оператор T^* действуют ограниченным образом из $H^0(\mathbb{R}^n)$ в $H^s(\mathbb{R}^n)$, где $s > n$, то T – интегральный оператор с равномерно непрерывным ядром. Это полезно знать при рассмотрении краевых задач, но нам не понадобится.

3. Несколько определений и фактов из теории компактных операторов в гильбертовом пространстве. Доказательства к утверждениям этого пункта содержатся во многих книгах, например, в книге И.Ц. Гохберга и М.Г. Крейна "Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве", Наука, 1965.

Пусть T компактный оператор в гильбертовом пространстве H. Рассмотрим оператор T^*T. Это самосопряженный компактный оператор с неотрицательными собственными значениями. Положительные квадратные корни из его положительных собственных значений называются *s-числами* оператора T. Они обозначаются через $s_j(T)$ и нумеруются в порядке невозрастания с учетом кратностей. Если T – самосопряженный оператор с неотрицательными собственными значениями, то это просто его положительные собственные значения.

Доказывается, что

$$s_j(T) = s_j(T^*) \tag{22}$$

и что если если B – ограниченный оператор, то

$$s_j(BT) \le \|B\| s_j(T), \quad s_j(TB) \le \|B\| s_j(T). \tag{23}$$

Через $\mathfrak{S}_p$, $p \ge 0$, обозначается класс операторов с

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j^p < \infty \tag{24}$$

Эти классы называют *классами Неймана–Шаттена.*

Каждый класс $\mathfrak{S}_p$ является идеалом в пространстве линейных ограниченных операторов в H. При $p \ge 1$ в нем вводится норма, определяемая как корень p-й степени из суммы ряда (24). Доказывается, что для оператора из $\mathfrak{S}_p$ ряд из p-х степеней модулей собственных значений тоже сходится. Этот идеал сужается с убыванием p.

Операторы из $\mathfrak{S}_2$ называются *операторами Гильберта–Шмидта*. Доказывается. что в $L_2(M)$ это в точности операторы с квадратично интегрируемыми ядрами. (С таким оператором мы встретились в теореме 2, см. (13).) Здесь M – любое пространство с мерой.

Операторы из $\mathfrak{S}_1$ называются *ядерными*. Ряд из собственных значений такого оператора абсолютно сходится, и его сумма называется *следом* этого оператора.

4. Формула для следа ядерного интегрального оператора с непрерывным ядром.

Теорема 4. *Пусть T – интегральный оператор на метрическом пространстве M с мерой dx, имеющий непрерывное ядро $K(x,y)$ и компактный в $H = L_2(M)$. Предположим его самосопряженным, и пусть все его собственные значения μ_j $(j = 1, 2, \dots)$ положительны. Тогда*

$$\operatorname{tr} T = \sum_1^\infty \mu_j = \int_M K(x,x)\,dx. \tag{25}$$

Собственные значения нумеруются с учетом кратностей в порядке невозрастания.

Доказательство теоремы по существу уже намечено в конце прошлой лекции. Пусть $\{e_j(x)\}_1^\infty$ – ортонормированный базис из собственных функций оператора T. Они непрерывны, так как

$$\int_M K(x,y)e_j(y)\,dy = \mu_j e_j(x).$$

В $L_2(M)$

$$Tu(x) = \sum_1^\infty \mu_j (u, e_j) e_j. \tag{26}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{j=1}^\infty \mu_j e_j(x)\overline{e_j(y)}. \tag{27}$$

Он сходится равномерно по теореме Мерсера (см. Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, "Лекции по функциональному анализу", п. 98). Пусть T_1 – интегральный оператор с этим ядром. Это самосопряженный оператор с теми же собственными функциями и собственными значениями, что и у T. Поэтому $T = T_1$ и

$$K(x,y) = \sum_{j=1}^\infty \mu_j e_j(x)\overline{e_j(y)}. \tag{28}$$

Остается положить $x = y$ и проинтегрировать по многообразию. □

Полученный результат применим, конечно, к операторам, удовлетворяющим предположениям теоремы 3 на компактном многообразии M, если это самосопряженные операторы с положительными собственными значениями.

Можно доказать, что теорема 4 остается верной для любого ядерного интегрального оператора с непрерывным ядром, не обязательно неотрицательного и даже не обязательно самосопряженного. Но следует иметь в виду, что одной непрерывности ядра недостаточно для ядерности интегрального оператора.

Лекция 9

5. Параметрикс для оператора $A(\lambda) = A - \lambda I$ в $\mathbb{R}^n$. Мы предположим, что A – полиоднородный ПДО порядка $m > 0$, сначала в $\mathbb{R}^n$, эллиптический с параметром в угле L на комплексной плоскости с биссектрисой $\mathbb{R}_-$: для главного символа $a_0(x,\xi)$ справедливо неравенство

$$|a_0(x,\xi) - \lambda| \geq c(|\xi|^m + |\lambda|) \quad (|\xi| + |\lambda| \neq 0, \ \ \lambda \in L). \tag{1}$$

Мы обсудим подробности построения параметрикса и уточним, как именно он аппроксимирует резольвенту. Будем опускать доказательства технических предложений, чтобы не закопаться в этой теме. Кроме того, для простоты будем предполагать, что (полный) символ $a(x,\xi)$ и все члены его разложения

$$a(x,\xi) \approx a_0(x,\xi) + a_1(x,\xi) + \dots \tag{2}$$

не зависят от x при больших x (чего достаточно для рассмотрения ПДО на замкнутом многообразии), а именно при $|x| \geq r$.

Эти функции $a_k(x,\xi)$ в случае, если A не является дифференциальным оператором, удобно сразу "отремонтировать" следующим образом. Пусть $\theta(\tau)$ – неотрицательная функция из $C^\infty(\mathbb{R}_+)$, равная 0 при $\tau \leq 1/2$ и 1 при $\tau \geq 1$, заключенная между 0 и 1 при промежуточных τ. Положим

$$a_{\theta,0} = \theta(|\xi|)a_0(x,\xi) + 1 - \theta(|\xi|), \tag{3}$$

$$a_{\theta,k}(\xi) = \theta(|\xi|)a_k(x,\xi) \quad (k = 1,2,\dots) \tag{4}$$

и будем считать, что

$$a_{\theta,0}(x,0) = 1, \quad a_{\theta,k}(x,0) = 0 \ \text{ при } \ k = 1,2,\dots. \tag{5}$$

Теперь

$$a(x,\xi) \sim a_{0,\theta}(x,\xi) + a_{1,\theta}(x,\xi) + \dots, \tag{6}$$

при этом

$$a_{\theta,0}(x,\xi) - \lambda \neq 0 \quad (\forall x,\xi; \ \lambda \in L) \tag{7}$$

и при всех k

$$a_{\theta,k}(x,\tau\xi) = \tau^{m-k} a_{\theta,k}(x,\xi) \quad (|\xi| \geq 1, \ \tau \geq 1). \tag{8}$$

Построим теперь рациональные по λ функции $b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda)$ $(l = 0,1,\dots)$, положительно однородные по $(\xi, \lambda^{1/m})$ степени $-m-l$:

$$b_{\theta,l}(x,\tau\xi,\tau^m\lambda) = \tau^{-m-l} b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda) \quad (|\xi| \geq 1, \ \tau \geq 1). \tag{9}$$

Сделаем это так, чтобы

$$\left[\sum_0^\infty a_{\theta,k}(x,\xi) - \lambda\right] \circ \left[\sum_0^\infty b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda)\right] = 1, \tag{10}$$

где $\circ$ – обычное правило композиции символов. Приравнивая символы одинаковых степеней однородности слева и справа, получаем цепочку соотношений

$$(a_{\theta,0}-\lambda)b_{\theta,0}=1,$$
$$(a_{\theta,0}-\lambda)b_{\theta,j}+\sum_{k+l+\alpha=j,l<j}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha a_{\theta,k}D_x^\alpha b_{\theta,l}=0\quad(j\geq 1).$$

Из этих соотношений функции $b_{\theta,l}$ последовательно определяются. При этом

$$b_{\theta,0}(x,\xi)=\frac{1}{a_{\theta,0}(x,\xi)-\lambda}\,, \tag{11}$$
$$b_{\theta,1}(x,\xi,\lambda)=\frac{-a_{\theta,1}(x,\xi)}{[a_{\theta,0}(x,\xi)-\lambda]^2}+\frac{-i\sum\partial_{\xi_j}a_{\theta,0}(x,\xi)\cdot\partial_{x_j}a_{\theta,0}(x,\xi)}{[a_{\theta,0}(x,\xi)-\lambda]^3} \tag{12}$$

и т.д. Нетрудно заметить, что при любом $l\geq 1$

$$b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda)=\sum_{k\geq 2}\frac{b_{\theta,l,k}(x,\xi)}{[a_{\theta,0}(x,\xi)-\lambda]^k}, \tag{13}$$

где сумма конечна и $b_{\theta,l.k}$ – некоторые многочлены от функций $a_{\theta,0},\dots,a_{\theta,l}$ и их производных. В частности,

$$b_{\theta,l,2}=-a_{\theta,l}. \tag{14}$$

(Забегая вперед, обратим внимание на то, что в случае дифференциального оператора это нуль при $l>m$, и тогда сумма начинается с $k=3$. При росте l один за другим исчезают члены с малыми степенями в знаменателях.)

При этом функции $b_{\theta,l,k}$ принадлежат $S^{m(k-1)-l}$, положительно однородны по ξ в смысле

$$b_{\theta,l,k}(x,\tau\xi)=\tau^{(k-1)m-l}b_{\theta,l,k}(\tau,\xi)\quad(|\xi|\geq 1,\ \tau\geq 1) \tag{15}$$

и не зависят от x при $|x|\geq r$.

Заметим, что модуль $|a_{\theta,0}(x,\xi)|$ оценивается при малых $\lambda\in L$ снизу некоторой положительной постоянной. Отсюда следует, что неравенство (7) сохраняется в

$$L_\rho=L\cup\{\lambda:|\lambda|\leq\rho\} \tag{16}$$

при некотором $\rho>0$, так что наше построение функций b_l сохраняется при $\lambda\in L_\rho$. Несложно проверяется

Предложение 1. *При $\lambda\in L_\rho$*

$$|a_{\theta,0}(x,\xi)-\lambda|\geq C_0(1+|\xi|^m+|\lambda|). \tag{17}$$

Здесь и дальше постоянные не зависят от (x,ξ,λ).

Предложение 2. *При* $\lambda \in L_\rho$

$$|b_{\theta,0}(x,\xi,\lambda)| \le C_0(1+|\xi|^m+|\lambda|)^{-1} \tag{18}$$

и, если $|\alpha|+|\beta|+l>0$,

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda)| \le C_{\alpha,\beta,l}(1+|\xi|^m+|\lambda|)^{-2}(1+|\xi|)^{m-l-|\beta|}, \tag{19}$$

так что в общем случае

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda)| \le C'_{\alpha,\beta,l}(1+|\xi|^m+|\lambda|)^{-1}(1+|\xi|)^{-m-l-|\beta|}. \tag{20}$$

Эти оценки проверяются "руками". Они похожи на оценки Грубб, на намного раньше появились у Сили (1967), который исследовал параметрикс, не имея исчисления ПДО с параметром. Ничего лучшего в общем случае не получается.

Если попробовать отказаться от исправления функций $a_k(x,\xi)$ при малых ξ (опустим тогда индекс θ), то наши оценки в общем случае теряют силу и вблизи $\xi=0$ функции $b_{l,k}(x,\xi)$ оказываются неограниченными при $(k-1)m-l<0$. Но это не так в случае дифференциального оператора A, в этом случае исправлять символы при малых ξ не надо (точнее, не надо, если мы рассматриваем λ, отделенные от нуля). А если ограничиться малыми l ($l<m+n$), то можно обойтись без ремонта и в случае ПДО; мы воспользуемся этим в лекции 11.

Положим

$$r_N(x,\xi,\lambda) = \sum_{|\alpha|\le N} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha [a(x,\xi)-\lambda]\cdot D_x^\alpha \sum_{l=0}^N b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda) - 1. \tag{21}$$

Понятно, что это "частная сумма" в (10), если единицу перенести налево.

Предложение 3. *При* $\lambda \in L_\rho$ *и любом* γ

$$|\partial_x^\gamma r_N(x,\xi,\lambda)| \le C_{\gamma,N}\frac{(1+|\xi|)^{m-N-1}}{1+|\xi|^m+|\lambda|}. \tag{22}$$

Предложение 4. *Пусть* $c(x,\xi,\lambda)$ *– функция на* $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times L_\rho$, *непрерывная с производными любого порядка по* x *и не зависящая от* x *при* $|x|\ge r$, *и пусть*

$$|\partial_x^\alpha c(x,\xi,\lambda)| \le C_\alpha \frac{(1+|\xi|)^p}{1+|\xi|^m+\lambda} \tag{23}$$

при некоторых $m>0$, $p\in\mathbb{R}$ *и любом* α, *где* C_α *не зависят от* (x,ξ,λ). *Тогда для оператора*

$$C(\lambda)f(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}c(x,\xi,\lambda)(Ff)(\xi)\,d\xi \tag{24}$$

при любом s *справедлива оценка*

$$\|C(\lambda)f\|_{s+m-p} + |\lambda|\cdot\|C(\lambda)f\|_{s-p} \le C_s\|f\|_s. \tag{25}$$

Здесь и дальше в этом пункте нормы берутся по $\mathbb{R}^n$.

Лекция 10

Вспомним формулировку последнего предложения.

Предложение 4. *Пусть $c(x,\xi,\lambda)$ – функция на $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\times L_\rho$, непрерывная с производными любого порядка по x и не зависящая от x при $|x|\ge r$, и пусть*

$$|\partial_x^\alpha c(x,\xi,\lambda)|\le C_\alpha\frac{(1+|\xi|)^p}{1+|\xi|^m+\lambda} \tag{23}$$

при некоторых $m>0$, $p\in\mathbb{R}$ и любом α, где C_α не зависят от (x,ξ,λ). Тогда для оператора

$$C(\lambda)f(x)=(2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi}c(x,\xi,\lambda)(Ff)(\xi)\,d\xi \tag{24}$$

при любом s справедлива оценка

$$\|C(\lambda)f\|_{s+m-p}+|\lambda|\cdot\|C(\lambda)f\|_{s-p}\le C_s\|f\|_s. \tag{25}$$

Здесь и дальше в этом пункте нормы берутся по $\mathbb{R}^n$.

Схема доказательства. Оно проводится в духе нашего доказательства теоремы об ограниченности ПДО без параметра в соболевских нормах (предыдущий семестр). Полагаем

$$v(x,\lambda)=C(\lambda)f(x).$$

Рассматриваем два случая. 1) Символ c не зависит от x. Это легкий случай, надо перейти к преобразованиям Фурье. 2) Символ c равен 0 при больших $|x|$. Тогда тоже делается преобразование Фурье и надо рассматривать оператор

$$(Fv)(\eta,\lambda)=(2\pi)^{-n}\int d(\eta-\xi,\xi,\lambda)(Ff)(\xi)\,d\xi,$$

где

$$d(\eta,\xi,\lambda)=\int e^{-ix\cdot\eta}c(x,\xi,\lambda)\,dx.$$

Эта функция, как нетрудно проверить (умножением слева на η^α и интегрированием по частям) быстро убывает при $\eta\to\infty$.

Далее надо рассмотреть

$$V(\eta,\lambda)=(1+|\eta|^m+|\lambda|)(1+|\eta|)^{s-p}(Fv)(\eta,\lambda),\quad U(\xi)=(1+|\xi|)^s(Ff)(\xi).$$

Мы имеем

$$V(\eta,\lambda)=\int e(\eta,\xi,\lambda)U(\xi)\,d\xi,$$

где $e(\eta,\xi,\lambda)$ легко выписывается. При помощи *неравенства Питре*

$$\left(\frac{1+|\eta|}{1+|\xi|}\right)^{\pm1}\le 1+|\eta-\xi| \tag{26}$$

(полезно проверить его самостоятельно) проверяется, что

$$|e(\eta,\xi,\lambda)| \le C(1+|\eta-\xi|)^{-n-1},$$

этого достаточно для получения нужной оценки

$$\|V(\eta,\lambda)\|_0 \le C'\|U(\xi)\|_0. \qquad \square$$

Введем операторы

$$B_{\theta,l}(\lambda)f(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi} b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda)(Ff)(\xi)\,d\xi. \tag{27}$$

При фиксированном $\lambda \in L_\rho$ это оператор порядка $-m-l$ в $\mathbb{R}^n$. С учетом оценки для $b_{\theta,l}$ из лекции 9 (неравенство (20)) получаем из предложения 4

Следствие 5. *При $s \in \mathbb{R}$, $\lambda \in L_\rho$*

$$\|B_{\theta,l}(\lambda)f\|_{s+m+l} + |\lambda|\cdot\|B_{\theta,l}(\lambda)f\|_{s+l} \le C'_{s,l}\|f\|_s. \tag{28}$$

Положим

$$B^{(N)}(\lambda) = B^{(N)}_\theta(\lambda) = B_{\theta,0}(\lambda) + \cdots + B_{\theta,N}(\lambda). \tag{29}$$

Этот оператор назовем *параметриксом порядка N для оператора $A(\lambda) = A - \lambda I$*. Из того же предложения 4 вытекает

Следствие 6. *При $N \in \mathbb{Z}_+$, $\lambda \in L_\rho$, $s \in \mathbb{R}$*

$$\|B^{(N)}(\lambda)f\|_{s+m} + |\lambda|\|B^{(N)}(\lambda)f\|_s \le C_{s,N}\|f\|_s. \tag{30}$$

Еще одно следствие получается для оператора с символом

$$r_N(x,\xi,\lambda) = \sum_{|\alpha|\le N}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi[a(x,\xi)-\lambda]\cdot D^\alpha_x\sum_{l=0}^N b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda) - 1 \tag{21}$$

с учетом оценки для него, приведенной в лекции 9:

$$|\partial^\gamma_x r_N(x,\xi,\lambda)| \le C_{\gamma,N}\frac{(1+|\xi|)^{m-N-1}}{1+|\xi|^m+|\lambda|}. \tag{22}$$

Следствие 7. *Для оператора*

$$C_N(\lambda)f(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\xi} r_N(x,\xi,\lambda)(Ff)(\xi)\,d\xi \tag{31}$$

при $\lambda \in L_\rho$, $s \in \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\|C_N(\lambda)f(x)\|_{s+N+1} + |\lambda|\cdot\|C_N(\lambda)f\|_{s+N+1-m} \le C'_{s,N}\|f\|_s. \tag{32}$$

Пусть φ, ψ – функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, причем $\psi = 1$ в окрестности носителя функции φ. Тогда

$$[B^{(N)}(\lambda)(\psi\cdot) - \psi B^{(N)}(\lambda)](\varphi\cdot) = \chi B^{N)}(\lambda)(\varphi\cdot), \tag{33}$$

где $\chi = 1 - \psi \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$; носители функций φ и χ не пересекаются.

Предложение 8. *Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi \in \mathcal{B}^\infty(\mathbb{R}^n)$ и носители функций φ, χ не пересекаются. Тогда при $\lambda \in L_\rho$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{R}$ и сколь угодно большом q*

$$(1 + |\lambda|)^2 \|\chi B^{(N)}(\lambda)(\varphi f)\|_{s+q} \le C_{s,q,N}\|f\|_s. \tag{34}$$

Это некоторая подготовка к переходу на многообразие. Благодаря тому, что носители функций φ и χ не пересекаются, удается "заработать" повышение порядка нормы на любое q, но степень множителя с $|\lambda|$ поднять выше 2 в общем случае нельзя.

Положим

$$T_N(\lambda) = A(\lambda)B^{(N)}(\lambda) - I. \tag{35}$$

Предложение 9. *При $\lambda \in L_\rho$, $N \in \mathbb{Z}_+$, $s \in \mathbb{R}$*

$$\|T_N(\lambda)f\|_{s+N+1} + |\lambda|\|T_N(\lambda)f\|_{s+N+1-m} \le C''_{s,N}\|f\|_s. \tag{36}$$

Это ключевое предложение, в котором выясняется, насколько хорош параметрикс порядка N.

Схема доказательства. Пусть $f(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $g(\eta) = (Ff)(\eta)$. Запишем

$$h(y,\eta,\lambda) = \sum_{k=0}^{N} b_{\theta,k}(y,\eta,\lambda) = h_1(\eta,\lambda) + h_2(y,\eta,\lambda), \tag{37}$$

где $h_1(\eta,\lambda)$ совпадает с левой частью при $|y| \ge r$ и поэтому не зависит от y, а $h_2(y,\eta,\lambda)$ обращается в нуль при $|y| \ge r$. Запишем оператор $T^{(N)}(\lambda)$ в виде

$$T^{(N)}(\lambda) = C_N(\lambda) + C'_N(\lambda), \tag{38}$$

где $C_N(\lambda)$ – оператор (31). Для этого оператора нужная оценка указана в (32).

Чтобы выписать формулу для $C'_N(\lambda)f$, нужно разложить символ $a(x,\xi)$ по формуле Тейлора:

$$a(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le N} \frac{1}{\alpha!}[\partial_\eta^\alpha a(x,\eta)](\xi-\eta)^\alpha + r_N^{(1)}(x,\xi,\eta). \tag{39}$$

Вычисления показывают, что

$$C'_N(\lambda)f(x) = (2\pi)^{-2n}\int e^{ix\cdot\xi}d\xi\int e^{-iy\cdot\xi}dy\int e^{ix\cdot\eta}r_N^{(1)}(x,\xi,\eta)h_2(y,\eta,\lambda)g(\eta)\,d\eta.$$

Эту формулу удается преобразовать к виду

$$C'_N(\lambda)f(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\cdot\eta}b_N(x,\eta,\lambda)g(\eta)\,d\eta \tag{40}$$

и показать, что b_N удовлетворяет такой же оценке, как r_N, так что нужная оценка для $C'_N(\lambda)f$ тоже получается. В итоге получается требуемый результат (36). □

Следствие 10. *Пусть функции φ, ψ принадлежат $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, и пусть $\psi(x) = 1$ в окрестности носителя функции φ. Тогда для оператора*

$$T_{N,\varphi,\psi}(\lambda) = [A(\lambda)\psi B^{(N)}(\lambda) - I](\varphi\cdot) \tag{41}$$

справедлива оценка, аналогичная (36).

6. Параметрикс на замкнутом многообразии M. Пусть теперь A – полиоднородный ПДО порядка m на замкнутом многообразии M, эллиптический с параметром в угле L с биссектрисой $\mathbb{R}_-$. Зафиксируем покрытие $\{O_q\}_1^K$ многообразия координатными окрестностями; пусть $\{\varphi_q\}$ – система бесконечно гладких функций на M, образующих подчиненное этому покрытию разбиение единицы, и $\{\psi_q\}$ – вторая система бесконечно гладких функций на M с носителями в O_q, такая, что $\psi_q = 1$ в окрестности носителя функции φ_q. Переходя к локальным координатам в O_q, можно предположить, что локально наш оператор совпадает с ПДО A_q в $\mathbb{R}^n$, эллиптическим с параметром в L. Чтобы уточнить это утверждение о локальном совпадении, предположим, что заданы еще две системы бесконечно гладких функций $\{\chi_q\}$ и $\{\theta_q\}$ на M с носителями в O_q, причем $\chi_q = 1$ в окрестности носителя функции ψ_q и $\theta_q = 1$ в окрестности носителя функции χ_q. Совпадение имеет место в смысле

$$\theta_q A(\chi_q\cdot) = \theta_q A\chi_q\cdot)$$

после привычных нам отождествлений функций с малыми носителями на многообразии M и в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $B_q^{(N)}(\lambda)$ – параметрикс в $\mathbb{R}^n$ порядка N для $A_q(\lambda) = A_q - \lambda I$, построенный в области L_ρ; можно считать, что ρ не зависит от q. Определим *параметрикс порядка N для $A(\lambda) = A - \lambda I$* формулой

$$B^{(N)}(\lambda) = \sum_{q=1}^K \psi_q B_q^{(N)}(\lambda)(\varphi_q\cdot) \quad (\lambda\in L_\rho,\ N = 0,1,\dots). \tag{1}$$

Из описанных выше результатов в $\mathbb{R}^n$ выводятся следующие теоремы.

Теорема 1. *При $\lambda\in L_\rho$, $s\in\mathbb{R}_+$, $N = 0,1,\dots$ справедливы оценки*

$$\|B^{(N)}(\lambda)f\|_{s+m,M} + |\lambda|\cdot\|B^{(N)}(\lambda)f\|_{s,M} \le C_s\|f\|_{s,M}, \tag{2}$$

где C_s не зависит от λ и f.

Положим

$$T^{(N)}(\lambda) = A(\lambda)B^{(N)}(\lambda) - I. \tag{3}$$

Теорема 2. *При $\lambda \in L_\rho$, $s \in \mathbb{R}$, $N = 0, 1, \ldots$*

$$\|T^{(N)}(\lambda)f\|_{s+N+1,M} + |\lambda| \cdot \|T^{(N)}(\lambda)f\|_{s+N+1-m,M} \le C'_s \|f\|_{s,M}, \tag{4}$$

где C'_s не зависит от λ и f.

Из последней теоремы следует, что оператор $I + T^{(N)}$ при фиксированном s и $N \ge \max(0, m-1)$ обратим, если $\lambda \in L$ достаточно велико по модулю, причем обратный выражается сходящимся по норме рядом Неймана, и тогда существует правый обратный к $A(\lambda)$ оператор

$$R(\lambda) = B^{(N)}(\lambda)[I + T^{(N)}(\lambda)]^{-1} = B^{(N)}(\lambda)\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}[T^{(N)}(\lambda)]^k\right]. \tag{5}$$

Он является и левым обратным, поскольку независимо доказывается априорная оценка

$$\|u\|_{s+m,M} + |\lambda| \cdot \|u\|_{s,M} \le C^{(s)} \|A(\lambda)u\|_{s,M} \tag{6}$$

при больших по модулю $\lambda \in L$, из которой следует единственность. Таким образом, (5) – резольвента. Далее, так как оператор $A(\lambda)$ эллиптичен, то $\operatorname{Ker} A(\lambda)$ не зависит от s, так что размерность этого ядра равна нулю при всех s. То же верно в отношении равенства индекса нулю. Поэтому из обратимости $A(\lambda)$ с фиксированным λ при некотором s вытекает обратимость при всех s.

Замечание. Это замечание следовало сделать раньше. Для справедливости оценки

$$|\lambda| \cdot \|u\|_s \le C^{(s)} \|A(\lambda)u\|_s \tag{7}$$

(для простоты она написана в $\mathbb{R}^n$) эллиптичность с параметром необходима. Доказательство проводится от противного с использованием функций

$$u(x) = \varphi(x)e^{i\tau x \cdot \xi_0}, \tag{8}$$

где φ – функция с малым носителем, равная 1 в окрестности рассматриваемой точки x_0, и значений $\lambda = \tau^m \lambda_0$, $\tau > 0$.

Из оценок (2) и (4) и формулы (5) вытекает

Следствие 1. *При достаточно больших по модулю $\lambda \in L$*

$$|\lambda|^2 \|[R(\lambda) - B^{(N)}(\lambda)]f\|_{s+N+1-m,M} \le C_{s,M} \|f\|_{s,M} \tag{9}$$

7. Асимптотика ядра резольвенты. Теперь мы предположим, что $m > n$. Тогда из второй теоремы Агмона следует, что $R(\lambda)$ и $B^{(N)}(\lambda)$ – операторы с непрерывными ядрами. Более того, взяв N достаточно большим, мы при помощи неравенства (9) можем оценить модуль разности этих ядер, он убывает как $|\lambda|^{-2}$. Так как поведение ядер слагаемых, из которых

состоит оператор $B^{(N)}(\lambda)$, более или менее легко выясняется из явных формул для этих операторов, то мы получим асимптотику ядра $K(x,y,\lambda)$ резольвенты при $\lambda \to \infty$ в L с точностью до $O(|\lambda|^{-2})$. Она интересна при $x = y$ и имеет вид (это содержание следующей лекции)

$$K(x,x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n+[m]} c_k(x)(-\lambda)^{\frac{n-k}{m}-1} + O(|\lambda|^{-2}), \tag{10}$$

если m нецелое и $[m]$ – его целая часть, и

$$K(x,x,\lambda) = \sum_{k=0}^{n+m-1} c_k(x)(-\lambda)^{\frac{n-k}{m}-1} + \widetilde{c}(x)(-\lambda)^{-2}\ln(-\lambda) + O(|\lambda|^{-2}) \tag{11}$$

с оценками остатков, равномерными по x и λ. (В (10) и (11) берутся ветви степени $(-\lambda)^\gamma$ и логарифма $\ln(-\lambda)$, совпадающие соответственно с $|\lambda|^\gamma$ и $\ln|\lambda|$ на $\mathbb{R}_-$.) В случае дифференциального оператора удается получить бесконечное асимптотическое разложение ядра $K(x,x,\lambda)$ по убывающим степеням $-\lambda$. Что же касается барьера $O(|\lambda|^{-2})$ в общем случае ПДО, то его удается преодолеть кружным путем, сначала надо рассмотреть степени ПДО, об этом поговорим позднее. При $m \le n$ надо рассматривать ядро степени резольвенты.

Лекция 11

Итак, мы предполагаем, что порядок m оператора A больше размерности n, и хотим получить асимптотику ядра $K(x,y,\lambda)$ резольвенты $R_A(\lambda)$ "на диагонали", т.е. при $x=y$. Это ядро, как и ядро $K^{(N)}(x,y,\lambda)$ параметрикса $B^{(N)}(x,y,\lambda)$, – непрерывные функции по второй теореме Агмона. Параметр λ принадлежит углу L эллиптичности с параметром (с биссектрисой $\mathbb{R}_-$) и по модулю берется настолько большим, что резольвента существует. Наша цель состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема 1. *При $\lambda\to\infty$ в L*

$$K(x,x,\lambda)=\sum_{l=0}^{n+[m]} c_l(x)(-\lambda)^{\frac{n-l}{m}-1}+O(|\lambda|^{-2}), \tag{1}$$

если m нецелое и $[m]$ – его целая часть, и

$$K(x,x,\lambda)=\sum_{l=0}^{n+m-1} c_l(x)(-\lambda)^{\frac{n-l}{m}-1}+\widetilde{c}(x)(-\lambda)^{-2}\ln(-\lambda)+O(|\lambda|^{-2}), \tag{2}$$

если m целое. Оценки остаточных членов равномерны по x и $\arg\lambda$.

Доказательство мы проведем полностью в несколько более простом случае нецелого m и затем с небольшими купюрами в случае целого m. Выбор N определяется тем, что нам нужна оценка

$$|K(x,x,\lambda)-K^{(N)}(x,x,\lambda)|\le C|\lambda|^{-2}. \tag{3}$$

Будем считать m нецелым. Как видно из неравенства

$$|\lambda|^2\cdot\|[R(\lambda)-B^{(N)}(\lambda)]f\|_{s+N+1-m,M}\le C_{s,M}\|f\|_{s,M}, \tag{4}$$

надо иметь $N+1-m>n$. Мы возьмем

$$N=[m]+n. \tag{5}$$

Можно было бы взять и бóльшее N, но это усложнило бы рассуждения и не привело бы к улучшению результата.

Вспомним, что

$$B^{(N)}(\lambda)=\sum_{q=1}^{K}\psi_q B_q^{(N)}(\lambda)(\varphi_q\cdot)\quad(\lambda\in L_\rho,\ N=0,1,\dots). \tag{6}$$

Носители функций φ_q и ψ_q принадлежат q-й координатной окрестности, φ_q образуют разбиение единицы. В локальных координатах при фиксированном q

$$B_q^{(N)}(\lambda)=B_{0,q}(\lambda)+\dots+B_{N,q}(\lambda). \tag{7}$$

Мы сознательно не написали здесь индекс θ. Дело в том, что $B_l(\lambda)$ при используемых сейчас индексах $l = 0, \dots, N$ можно писать без ремонта символов этих операторов при малых ξ. Поясним это. В локальных координатах

$$B_{l,q}(\lambda)f(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} b_{l,q}(x,\xi,\lambda)(Ff)(\xi)\, d\xi. \tag{8}$$

Здесь

$$b_{l,q}(x,\xi,\lambda) = \sum_{k\geq 2} \frac{b_{l,k,q}(x,\xi)}{[a_0(x,\xi)-\lambda]^k}, \tag{9}$$

где сумма конечна и

$$b_{l,k,q}(x,\tau\xi) = \tau^{(k-1)m-l} b_{l,k,q}(x,\xi) \quad (\xi \neq 0,\ \tau > 0). \tag{10}$$

Здесь даже при $k = 2$ и $l = N$ порядок однородности по ξ есть $m - N > -n$ в силу нашего соглашения (5) о N. Поэтому неинтегрируемой особенности при $\xi = 0$ нет, и нужда в ремонте не возникает, поскольку нам не нужно было дифференцировать символы по ξ.

Порядки операторов (8) ниже $-n$, и эти операторы тоже имеют непрерывные ядра

$$k_{l,q}(x,y,\lambda) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} b_{l,q}(x,\xi,\lambda)\, d\xi. \tag{11}$$

Непрерывность видна и из этих формул. В частности, при $x = y$

$$k_{l,q}(x,x,\lambda) = (2\pi)^{-n} \int b_{l,q}(x,\xi,\lambda)\, d\xi. \tag{12}$$

Функции $b_{l,q}(x,\xi,\lambda)$ обладают свойством однородности

$$b_{l,q}(x,\tau\xi,\tau^m\lambda) = \tau^{-m-l} b_{l,q}(x,\xi,\lambda) \quad (\xi \neq 0, \tau > 0). \tag{13}$$

Пусть сначала $\lambda \in \mathbb{R}_-$. Сделаем в последнем интеграле замену

$$\xi = |\lambda|^{1/m}\eta = (-\lambda)^{1/m}\eta. \tag{14}$$

Получим

$$k_{l,q}(x,x,\lambda) = (-\lambda)^{\frac{n-l}{m}-1}(2\pi)^{-n} \int b_{l,q}(x,\xi,-1)\, d\xi. \tag{15}$$

Теперь мы положим

$$c_l(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{q=1}^{K} \varphi_q(x) \int b_{l,q}(x,\xi,-1)\, d\xi \tag{16}$$

с обычными отождествлениями точек на M и в $\mathbb{R}^n$. При нецелом m сразу получаем нужную асимптотику (1).

Формулы (15) аналитическим продолжением распространяются на $\lambda \in L$, оценки сохраняются, и асимптотика (1) получается во всем угле L равномерно по всем направлениям.

Теперь обсудим случай целого m. Чтобы иметь (3), придется взять

$$N = m + n, \tag{17}$$

и теперь уже без ремонта символов при малых ξ не обойтись. Но неприятность, заставляющая сделать этот ремонт, возникает в единственном месте, а именно в формуле для $b_{N,q}(x,\xi,\lambda)$ и, еще точнее, в $b_{N,2,q}(x,\xi)$, см. формулу (9), это числитель первой дроби справа. Здесь особенность неинтегрируема. Остальные слагаемые в этой формуле не имеют такой особенности и дают вклад $O(|\lambda|^{-2})$ в асимптотику ядра $K(x,x,\lambda)$, что поглощается остаточным членом в формуле (2). Формально рассуждая, следовало бы определить параметрикс с отремонтированными символами, заменить их не отремонтированными в тех слагаемых, в которых это возможно, добиваясь однородности при $\xi \neq 0$, и показать, что возникающие при этом добавочные слагаемые имеют порядок $O(|\lambda|^{-2})$. Это возможно, но нудно. Ограничимся рассмотрением следующего интеграла от дроби $b_{m+n,2,q}/[a_0-\lambda]^2$ (опуская индекс q):

$$-(2\pi)^{-n}\int_{|\xi|\geq 1}\frac{a_{m+n}(x,\xi)}{[a_0(x,\xi)-\lambda]^2}\,d\xi. \tag{18}$$

Пусть опять сначала $\lambda \in \mathbb{R}$. Сделаем замену (14) и перейдем к сферическим координатам ($\eta = r\omega$, $|\omega| = 1$). Получим

$$-(2\pi)^{-n}|\lambda|^{-2}\int_{|\lambda|^{-1/m}}^{\infty}\frac{dr}{r}\int_{|\omega|=1}\frac{a_{m+n}(x,\omega)\,dS_\omega}{[r^m a_0(x,\omega)+1]^2}.$$

Так как это выражение интересует нас с точностью до прибавления $O(|\lambda|^{-2})$, то в интеграле по r можно заменить верхний предел конечным числом $h > 0$ и затем заменить r^m нулем в интеграле по единичной сфере. Получим, что это выражение равно

$$\frac{-1}{(2\pi)^n m}|\lambda|^{-2}\ln|\lambda|\int_{|\omega|=1}a_{m+n}(x,\omega)\,dS + O(|\lambda|^{-2}).$$

На остальные λ вычисление главной части этого выражения распространяется аналитическим продолжением. Оценка остаточного члена сохраняется.

Получаем формулу (2) с

$$\widetilde{c}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^n m}\sum_{q=1}^{K}\varphi_q(x)\int_{|\omega|=1}a_{m+n,q}(x,\omega)\,dS. \tag{19}$$

(В случае дифференциальных операторов этот коэффициент (19) равен, конечно, нулю.) $\square$

Отметим еще, что хотя коэффициенты в (1) и (2) вычисляются интегрированием в локальных координатах, они при заданной на многообразии плотности имеют инвариантный смысл как коэффициенты асимптотики ядра данного оператора.

Старший коэффициент допускает инвариантную запись

$$c_0 = (2\pi)^{-n} \int_{T_x^* M} [a_0(x,\xi)+1]^{-1}\, d\xi. \tag{20}$$

Интегрированием по M мы получаем асимптотику следа ядра резольвенты:

Следствие. *При предположениях теоремы* 1 *имеет место асимптотика*

$$\int_M K(x,x,\lambda)\, dx == \sum_{l=0}^{n+[m]} c_l (-\lambda)^{\frac{n-l}{m}-1} + O(|\lambda|^{-2}), \tag{21}$$

если m *нецелое и* $[m]$ *– его целая часть, и*

$$\int_M K(x,x,\lambda)\, dx = \sum_{l=0}^{n+m-1} c_l (-\lambda)^{\frac{n-l}{m}-1} + \widetilde{c}(-\lambda)^{-2}\ln(-\lambda) + O(|\lambda|^{-2}), \tag{22}$$

если m *целое. Коэффициенты* c_l *и* $\widetilde{c}$ *– это интегралы соответственно от* $c_l(x)$ *и* $\widetilde{c}(x)$*. В частности,*

$$c_0 = (2\pi)^{-n} \int_{T^* M} [a_0(x,\xi)+1]^{-1} dx\, d\xi; \tag{23}$$

здесь плотность $dx\, d\xi$ *не зависит от выбора локальных координат. Оценки остаточных членов равномерны по* $\arg\lambda$*.*

Теперь мы кратко обсудим случай, когда A – оператор в частных производных. Как уже сказано, в этом случае из-за отсутствия членов a_j с $j > m$ улучшается структура формул для b_l при росте l. При $\lambda \in L$ с модулем, превосходящим положительную постоянную, получается оценка

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta b_l(x,\xi,\lambda)| \le C_{\alpha,\beta,l}(1+|\xi|^m+|\lambda|)^{-1-\frac{l+|\beta|}{m}}. \tag{24}$$

По существу мы находимся в рамках исчисления Шубина (а не Грубб). Оценка для r_N принимает вид

$$|\partial_x^\gamma r_N(x,\xi,\lambda)| \le C_{\gamma,N}(1+|\xi|^m+|\lambda|)^{-\frac{N+1}{m}}. \tag{25}$$

Если $c(x,\xi,\lambda)$ – непрерывная со всеми производными по x функция, удовлетворяющая при всех α неравенствам

$$|\partial_x^\alpha c(x,\xi,\lambda)| \le C_\alpha (1+|\xi|^m+|\lambda|)^{-p}, \tag{26}$$

где $p > 0$, то для оператора $C(\lambda)$ в $\mathbb{R}^n$ с этим символом получается оценка

$$\|C(\lambda)f\|_{s+mp} + |\lambda|^p \|C(\lambda)f\|_s \le C_s \|f\|_s. \tag{27}$$

Это приводит к следующему результату для оператора $T^{(N)}$ на M при $N > m$:

$$\|T^{(N)}(\lambda)f\|_{s+N+1+m,M} + |\lambda|^{\frac{N+1+m}{m}} \|T^N(\lambda)f\|_{s,M} \le C_{s,N} \|f\|_{s,M}. \tag{28}$$

Далее, для достаточно больших по модулю $\lambda \in L$ и $N > m$

$$\|[R(\lambda) - B^{(N)}(\lambda)]f\|_{s+m+N+1,M} + |\lambda|^{\frac{m+N+1}{m}} \|[R(\lambda) - B^{(N)}(\lambda)]f\|_{s,M} \le C_{s,N} \|f\|_{s,M}. \tag{29}$$

Вот окончательная теорема:

Теорема 2. *При сделанных выше предположениях об операторе в частных производных на M порядка $m > n$ для любого натурального N*

$$K(x,x,\lambda) = \sum_{l=0}^{N} c_l(x)(-\lambda)^{\frac{n-l}{m}-1} + O(|\lambda|^{\frac{n-N-1}{m}-1}) \tag{30}$$

при $\lambda \to \infty$ в L с оценкой остатка, равномерной по x и $\arg\lambda$.

Интегрируя по M, получаем сколь угодно точную асимптотику следа ядра резольвенты.

8. Тауберова теорема. Пусть $\{\lambda_j\}_1^\infty$ – неубывающая последовательность неотрицательных чисел, стремящаяся к бесконечности. Через $N(\lambda)$ обозначим ее *функцию распределения*: это число членов λ_j последовательности, не превосходящих λ:

$$N(\lambda) = \operatorname{card}\{j : \lambda_j \le \lambda\}. \tag{1}$$

Очевидно, что это неубывающая неотрицательная функция, стремящаяся к бесконечности при $\lambda \to \infty$.

Предложение 1. *Соотношение*

$$\lambda_j = \alpha j^\beta + o(j^\beta) \quad (j \to \infty) \tag{2}$$

эквивалентно соотношению

$$N(\lambda) = \gamma \lambda^\delta + o(\lambda^\delta) \quad (\lambda \to \infty), \tag{3}$$

где

$$\delta = \frac{1}{\beta}, \quad \gamma = \frac{1}{\alpha^\delta}. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть выполнено соотношение (3). Тогда $\lambda_j \to \infty$. При $\lambda = \lambda_j$ имеем $N(\lambda) = j$, так что

$$\frac{j}{\gamma \lambda_j^\delta} \to 1 \quad (j \to \infty). \tag{5}$$

Возводя дробь слева в степень $-\beta$, получаем

$$\frac{\lambda_j}{\alpha j^\beta} \to 1, \tag{6}$$

т.е. соотношение (2).

Обратно, пусть выполнено соотношение (2). Тогда имеем (6) и (5), или

$$\frac{N(\lambda_j)}{\gamma \lambda_j^\delta} \to 1 \quad (j \to \infty). \tag{7}$$

Из (2) следует также, что $\lambda_{j+1}/\lambda_j \to 1$. Поэтому

$$\frac{N(\lambda_j)}{\gamma \lambda_{j+1}^\delta} \to 1. \tag{8}$$

При $\lambda_j < \lambda < \lambda_{j+1}$ мы имеем $N(\lambda) = N(\lambda_j)$ и

$$\frac{N(\lambda_j)}{\gamma \lambda_{j+1}^\delta} < \frac{N(\lambda)}{\gamma \lambda^\delta} < \frac{N(\lambda_j)}{\gamma \lambda_j^\delta}.$$

Отсюда и из (7)–(8) получается (3). $\square$

Определим *преобразование Стильтьеса* функции $N(\lambda)$, заданной на полуоси $\overline{\mathbb{R}}_+$ и локально имеющей ограниченное изменение, формулой

$$S(\zeta) = \int_0^\infty (\lambda - \zeta)^{-1} dN(\lambda) \quad (\zeta \notin \overline{\mathbb{R}}_+). \tag{9}$$

Сходимость этого интеграла обеспечивается условием

$$\int_0^\infty \lambda^{-1} dN(\lambda) < \infty. \tag{10}$$

В частности, если $N(\lambda)$ имеет вид (1), то

$$S(\zeta) = \sum_{j=1}^\infty (\lambda_j - \zeta)^{-1}, \tag{11}$$

а условие (10) принимает вид

$$\sum_{j=1}^\infty \lambda_j^{-1} < \infty. \tag{12}$$

Иногда преобразование (9) рассматривают только при вещественных $\zeta = -\mu < 0$. Положим

$$\mathcal{S}(\mu) = S(-\mu) = \int_0^\infty (\lambda + \mu)^{-1} dN(\lambda) \quad (\mu > 0). \tag{13}$$

Упражнение. Проверьте, что если $N(\lambda) = \gamma\lambda^\delta$, $0 < \delta < 1$, то $\mathcal{S}(\mu) = \rho\mu^{\delta-1}$, где

$$\rho = \gamma\delta B(\delta, 1-\delta) = \frac{\gamma\pi\delta}{\sin\pi\delta}\,. \tag{14}$$

Следующая теорема, называемая *абелевой теоремой для преобразования Стильтьеса*, справедлива без предположения о монотонности функции $N(\lambda)$.

Теорема 2. *Пусть* $0 < \delta < 1$ *и* $N(\lambda)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{\lambda\to\infty} N(\lambda)\lambda^{-\delta} = \gamma. \tag{15}$$

Тогда

$$\lim_{\mu\to\infty} \mu^{1-\delta}\mathcal{S}(\mu) = \rho, \tag{16}$$

где ρ *определено в* (14).

Доказательство обсуждать не будем. Обратной к этой теореме является нужная нам *тауберова теорема Харди–Литтльвуда*:

Теорема 3. *Пусть* $0 < \delta < 1$ *и* $N(\lambda)$ *– неубывающая функция, для которой выполнено условие* (10), *и пусть для ее преобразования Стильтьеса имеет место соотношение* (16). *Тогда справедливо соотношение* (15).

Лекция 12

Мы ограничимся рассмотрением случая, когда $N(\lambda)$ – функция распределения неубывающей последовательности положительных чисел λ_l. Это кусочно-постоянная функция, она постоянна между соседними точками λ_l и испытывает скачки в этих точках, причем непрерывна в них справа. В этом случае

$$S(\zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j - \zeta}, \tag{1}$$

это абсолютно сходящийся ряд с суммой, голоморфной всюду, кроме точек λ_j.

Замечание 1. В нужном нам случае, когда λ_j – собственные значения самосопряженного ПДО порядка $m > n$, эта функция имеет асимптотику

$$S(\zeta) = c(-\zeta)^{n/m-1} + O(|\zeta|^{(n-1)/m-1}) \tag{2}$$

вне сколь угодно узкого угла с биссектрисой $\mathbb{R}_+$ с равномерной оценкой остатка.

Нам понадобится полезное *неравенство Плейеля*, оно придумано Плейелем для приближенного обращения преобразования Стильтьеса $N(\lambda) \mapsto S(\zeta)$.

Теорема 4 (неравенство Плейеля). *Пусть* $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+$, $\zeta = \lambda_0 + i\eta_0$, $\eta_0 > 0$, $\overline{\zeta}_0 = \lambda_0 - i\eta_0$, *и пусть* Γ_{ζ_0} – *спрямляемая ориентированная кривая, идущая из* $\overline{\zeta}_0$ *в* ζ_0 *и не пересекающая* $\overline{\mathbb{R}}_+$. *Тогда*

$$\left| N(\lambda_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\zeta_0}} S(\zeta)\, d\zeta + \frac{\eta_0}{\pi} \operatorname{Re} S(\zeta_0) \right| \le \frac{\eta_0}{2} |\operatorname{Im} S(\zeta_0)|. \tag{3}$$

Следствие. *Справедливо неравенство*

$$\left| N(\lambda_0) - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\zeta_0}} S(\zeta)\, d\zeta \right| \le C_0 \eta_0 |S(\zeta_0)|, \tag{4}$$

где $C_0 = (\pi^{-2} + 2^{-2})^{1/2}$.

Применять мы будем неравенство (4), а доказывать – неравенство (3).

Доказательство неравенства (3). При доказательстве будем предполагать функцию $N(\lambda)$ постоянной вблизи λ_0, на точки скачка оно переносится предельным переходом. Обозначим через Γ замкнутый контур, получаемый добавлением к Γ_{ζ_0} вертикального отрезка, идущего из ζ_0 в $\overline{\zeta}_0$. Очевидно, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} S(\zeta)\, d\zeta = N(\lambda_0).$$

Поэтому неравенство (3) можно переписать в виде

$$\left| \frac{1}{2i} \int_{\overline{\zeta}_0}^{\zeta_0} S(\zeta)\, d\zeta - \eta_0 \operatorname{Re} S(\zeta_0) \right| \le \frac{\pi}{2} \eta_0 |\operatorname{Im} S(\zeta_0)|. \tag{5}$$

В таком виде и будем его доказывать. Мы имеем

$$\frac{1}{2i}\int_{\overline{\zeta}_0}^{\zeta_0} S(\zeta)\,d\zeta = \int_0^\infty I(\lambda)\,dN(\lambda), \tag{6}$$

где

$$I(\lambda) = \frac{1}{2i}\int_{\overline{\zeta}_0}^{\zeta_0} \frac{d\zeta}{\lambda-\zeta}\,. \tag{7}$$

Считая, что здесь интеграл берется по вертикальному отрезку и λ отлично от λ_0, сделаем замену

$$\zeta = \lambda_0 + i|\lambda-\lambda_0|\tau \tag{8}$$

и положим

$$s(\lambda) = \operatorname{sgn}(\lambda-\lambda_0), \quad u(\lambda) = \eta_0|\lambda-\lambda_0|^{-1}. \tag{9}$$

Цель этих замен выяснится ниже, см. переход от (13) к (14). Получим

$$\begin{aligned} I(\lambda) &= \frac{1}{2}\int_{-u(\lambda)}^{u(\lambda)} \frac{d\tau}{s(\lambda)-i\tau} = \frac{1}{2}\int_{-u(\lambda)}^{u(\lambda)} \frac{s(\lambda)+i\tau}{1+\tau^2}\,d\tau \\ &= s(\lambda)\int_0^{u(\lambda)} \frac{d\tau}{1+\tau^2} = s(\lambda)\operatorname{arctg} u(\lambda). \end{aligned} \tag{10}$$

В тех же обозначениях (9)

$$\begin{gathered} S(\zeta_0) = \int_0^\infty \frac{dN(\lambda)}{\lambda-\zeta_0} = \\ \int_0^\infty \frac{dN(\lambda)}{|\lambda-\lambda_0|[s(\lambda)-iu(\lambda)]} = \eta_0^{-1}\int_0^\infty \frac{s(\lambda)u(\lambda)+iu^2(\lambda)}{1+u^2(\lambda)}\,dN(\lambda), \end{gathered} \tag{11}$$

так что

$$\eta_0 \operatorname{Re} S(\zeta_0) = \int_0^\infty \frac{s(\lambda)u(\lambda)}{1+u^2(\lambda)}\,dN(\lambda), \quad \eta_0 \operatorname{Im} S(\zeta_0) = \int_0^\infty \frac{u^2(\lambda)}{1+u^2(\lambda)}\,dN(\lambda). \tag{12}$$

Теперь неравенство (5) можно переписать в виде

$$\left|\int_0^\infty s(\lambda)\left[\operatorname{arctg} u(\lambda) - \frac{u(\lambda)}{1+u^2(\lambda)}\right]dN(\lambda)\right| \le \frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{u^2(\lambda)}{1+u^2(\lambda)}\,dN(\lambda). \tag{13}$$

Ясно, что оно следует из неравенства

$$\left|\operatorname{arctg} u - \frac{u}{1+u^2}\right| \le \frac{\pi}{2}\frac{u^2}{1+u^2} \quad (u>0). \tag{14}$$

Разность слева под знаком модуля равна 0 при $u=0$ и имеет положительную производную при $u>0$. Значит, она положительна при $u>0$, модуль можно снять и переписать (14) в виде

$$\operatorname{arctg} u < \frac{u}{1+u^2} + \frac{\pi}{2}\frac{u^2}{1+u^2}. \tag{15}$$

При $u \geq \pi/2$ это неравенство вытекает из неравенства $\operatorname{arctg} u < \pi/2$. Остается проверить его при $0 < u < \pi/2$. Достаточно проверить, что при этих u производная левой части меньше производной правой части. Но это неравенство для производных, как легко проверить, следует из неравенства $u < \pi/2$. $\square$

Возвращаясь к теореме Харди–Литтльвуда, сделаем следующее замечание. Как мы видели, при наших предположениях функция $S(\zeta)$ голоморфна вне сколь угодно узкой окрестности луча $\mathbb{R}_+$. Легко также проверить, что она ограничена вне любой такой окрестности. Согласно формулировке теоремы, мы имеем

$$(-\zeta)^{1-\delta} S(\zeta) \to \rho \tag{16}$$

вдоль луча $\mathbb{R}_-$. Отсюда следует, что это соотношение выполняется равномерно при $|\arg \zeta| \geq \varepsilon$ в силу теоремы Монтеля.[2] Впрочем, в интересующем нас случае это просто нам дано, см. (2).

Доказательство теоремы 3 (Харди–Литтльвуда). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $\zeta_0 = (1 + i\varepsilon)\lambda_0$, здесь λ_0 будет стремиться к $+\infty$. Пусть Γ_{ζ_0} – дуга окружности с центром в начале, огибающая его слева и идущая из $\overline{\zeta}_0$ в ζ_0. В силу только что сделанного замечания найдется настолько большое $r(\varepsilon)$, что

$$|S(\zeta) - \rho(-\zeta)^{\delta-1}| \leq \varepsilon |\zeta|^{\delta-1} \text{ при } \zeta \in \Gamma_{\zeta_0}, \ \lambda_0 \geq r(\varepsilon). \tag{17}$$

Рассмотрим интеграл

$$I(\lambda_0, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\zeta_0}} (-\zeta)^{\delta-1} d\zeta. \tag{18}$$

При помощи замены $\zeta = \lambda_0 z$ получаем

$$I(\lambda_0, \varepsilon) = \lambda_0^\delta I(1, \varepsilon) = \lambda_0^\delta [I(1, 0) + h(\varepsilon)], \tag{19}$$

где $h(\varepsilon)$ не зависит от λ_0 и стремится к 0 при $\varepsilon \to +0$, а

$$I(1, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} (-z)^{\delta-1} dz$$

с обходом единичной окружности из $1 - i0$ по часовой стрелке (следует обратить внимание на знак минус перед z). Эту окружность можно заменить двумя отрезками из 1 в 0 и из 0 в 1 соответственно по нижнему и верхнему берегам разреза вдоль $\mathbb{R}_+$. Получаем

$$I(1, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 t^{\delta-1} dt \, [e^{-i\pi(\delta-1)} - e^{i\pi(\delta-1)}] = \rho \, \frac{\sin \pi\delta}{\pi\delta} = \gamma. \tag{20}$$

[2] Пусть функция $f(z)$ голоморфна и ограничена в угле $\{z : \alpha < \arg z < \beta\}$, где $\beta - \alpha \leq 2\pi$. Пусть она имеет предел l при $z \to \infty$ вдоль луча $\{z : \arg z = \gamma$, где $\alpha < \gamma < \beta$. Тогда она стремится к этому пределу равномерно в угле $\{z : \alpha + \delta \leq \arg z \leq \beta - \delta\}$ при сколь угодно малом фиксированном $\delta > 0$. См. Титчмарш, Теория функций, гл. 5.

Теперь применяем неравенство (4) в сочетании с (17)–(20). Получаем

$$|N(\lambda_0) - \gamma\lambda_0^{\delta}[\leq C[\varepsilon + |h(\varepsilon)|],$$

где C не зависит от ε и λ_0, если это не точка скачка функции $N(\lambda)$. Последнее ограничение автоматически снимается. Число ε можно сделать сколь угодно малым, увеличивая λ_0. Отсюда получается нужный результат. □

9. Асимптотика собственных значений. (Пожалуйста, найдите сами теоремы, которые используются дальше в этом пункте.) Снова пусть A – ПДО порядка $m > n$ на M, самосопряженный в $L_2(M)$ и имеющий спектр $\sigma(A)$, полуограниченный снизу. Поскольку мы сейчас интересуемся асимптотикой собственных значений, можно, не ограничивая общности, принять, что все они положительны. Так как норма резольвенты $R(\lambda)$ самосопряженного оператора A равна $1/d(\lambda)$, где $d(\lambda)$ – расстояние от точки λ до спектра $\sigma(A)$, то вне любого фиксированного угла с биссектрисой $\mathbb{R}_+$ верна оценка

$$|\lambda|\|u\|_{0,M} \leq C\|(A - \lambda I)u\|_{0,M}, \tag{1}$$

а отсюда, как мы знаем, следует эллиптичность с параметром в дополнении L к этому углу. Для следа резольвенты у нас получена асимптотика

$$\operatorname{tr} R_A(\zeta) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{\lambda_l - \zeta} = c_0(-\zeta)^{\frac{n}{m}-1} + O(|\zeta|^{\frac{n-1}{m}-1}) \quad (L \ni \zeta \to \infty). \tag{2}$$

где

$$c_0 = (2\pi)^{-n} \iint_{T^*M} \frac{1}{a_0(x,\xi) + 1}\, dx\, d\xi \tag{3}$$

и a_0 – главный символ ПДО A; он положителен. По теореме Харди–Литтльвуда (или непосредственно из неравенства Плейеля[3]) получается, что функция распределения $N(\lambda)$ собственных значений λ_l имеет асимптотику

$$N(\lambda) = \gamma\lambda^{\frac{n}{m}} + o(\lambda^{\frac{n}{m}}) \quad (\lambda \to +\infty), \tag{4}$$

где

$$\gamma = \frac{c_0}{\frac{n}{m}B(\frac{n}{m}, 1 - \frac{n}{m})}. \tag{5}$$

Это на самом деле уже спектральная асимптотика. Но из (5) следует асимптотическая формула для самих собственных значений:

$$\lambda_j = \alpha j^{\frac{m}{n}} + o(j^{\frac{m}{n}}), \qquad \textit{где } \alpha = \gamma^{-m/n}. \tag{6}$$

Отметим, что из неравенства Плейеля с учетом того, что в (2) мы имеем оценку остаточного члена, получается некоторая оценка остаточного члена

[3]Мы не доказали полностью, что спектральный след резольвенты совпадает со следом ее ядра при всех ζ из резольвентного множества оператора A, сделали это только при $\zeta \in \mathbb{R}_-$. Однако сохранение асимптотики в угле следует из теоремы Монтеля.

как в (5), так и в (6). Но наиболее точная (неулучшаемая) оценка остаточного члена в спектральной асимптотике получается из изучения функции e^{itA} от оператора A. Формула с такой оценкой имеет вид

$$N(\lambda) = \gamma\lambda^{\frac{n}{m}} + O(\lambda^{\frac{n-1}{m}}). \tag{7}$$

или

$$\lambda_j = \alpha j^{\frac{m}{n}} + O(j^{\frac{m-1}{n}}). \tag{8}$$

Для скалярных ПДО это теорема Хёрмандера (1968).

В заключение покажем, что формула (5) для γ может быть преобразована к такому виду:

$$\gamma = (2\pi)^{-n} \iint_{a_0(x,\xi)\le 1} dx\, d\xi. \tag{8}$$

Для доказательств достаточно в локальных координатах проверить при фиксированном x, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{a_0(x,\xi)+1}\, d\xi = \delta B(\delta, 1-\delta) \int_{a_0(x,\xi)<1} d\xi, \quad \text{где } \delta = \frac{n}{m}. \tag{9}$$

Перейдем здесь слева и справа к сферическим координатам $r = |\xi|$, $\omega = \xi/r$ и сделаем замену $r^m a_0(x,\omega) = t$. Доказываемое равенство примет вид

$$\int_0^\infty t^{\delta-1}(t+1)^{-1}\, dt \int_{|\xi|=1} a_0^{-\delta}\, dS = \delta B(\delta, 1-\delta) \int_0^1 t^{\delta-1}\, dt \int_{|\xi|=1} a_0^{-\delta}\, dS,$$

или

$$\int_0^\infty t^{\delta-1}(t+1)^{-1} dt = B(\delta, 1-\delta).$$

Но это одна из известных формул для функции Эйлера $B(\delta, 1-\delta)$.

Лекция 13

10. Степени позитивного эллиптического ПДО. В этом пункте мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть A – эллиптический ПДО из Ψ^m_{ph}, $m > 0$, на замкнутом многообразии M, позитивный в угловой окрестности луча $\mathbb{R}_-$, и пусть $a_0(x,\xi)$ – его главный символ. Тогда при любом комплексном z оператор A^z – ПДО из Ψ^{mz}_{ph} с главным символом $[a_0(x,\xi)]^z$.*

Здесь мы впервые сталкиваемся с ситуацией, когда главный символ (на самом деле и дальнейшие члены разложения локального полного символа) может иметь комплексную степень однородности:

$$[a_0(x,t\xi)]^z = t^{mz}a_0(x,\xi) \quad (t>0). \tag{1}$$

На этот случай обобщаются наши определения и результаты, относящиеся к полиоднородным ПДО.

Будет указан способ построения локального полного символа оператора A^z.

Доказательство теоремы. Для $\delta > 0$ обозначим через Γ_δ контур, состоящий из нижнего и верхнего берегов разреза вдоль луча $(-\infty, -\delta]$ и соединяющей их концы окружности $\{\lambda : |\lambda| = \delta\}$ с обходом против часовой стрелки. При $\operatorname{Re} z < 0$ оператор A^z можно определить формулой

$$A^z = (2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_\delta} \lambda^z R(\lambda)\,d\lambda, \tag{2}$$

где $R(\lambda) = A - \lambda I$ и $\lambda^z = \exp[z(\ln|\lambda| + i\arg\lambda)]$, $|\arg\lambda| \le \pi$; разрез при определении λ^z сделан вдоль $\mathbb{R}_-$. Число δ берем настолько малым, что при $\rho = 2\delta$ в

$$L_\rho = \overline{\mathbb{R}}_- \cup \{\lambda : |\lambda| \le \rho\}, \tag{3}$$

существуют и резольвента $R(\lambda)$, и аппроксимирующий ее параметрикс $B^{(N)}(\lambda)$ любого порядка N. Интеграл в (2) абсолютно, т.е. по операторной норме, сходится в любом $H^s(M)$.

Положим при $\operatorname{Re} z < 0$

$$A_{N,z} = (2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_\delta} \lambda^z B^{(N)}(\lambda)\,d\lambda. \tag{4}$$

Этот интеграл тоже сходится по операторной норме в любом $H^s(M)$.

Рассмотрим разность

$$A^z - A_{N,z} = (2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_\delta} \lambda^z[R(\lambda) - B^{(N)}(\lambda)]\,d\lambda.$$

Следующее неравенство справедливо при $\tau = 0$ и $\tau = 2$:

$$|\lambda|^\tau \|[R(\lambda) - B^{(N)}(\lambda)]f\|_{s+\sigma+N+1,M} \le C_\tau \|f\|_{s,M}, \tag{5}$$

где $\sigma = m(1-\tau)$ и постоянная C_τ не зависит от λ и f. Отсюда можно вывести, учитывая структуру норм, что оно справедливо при всех промежуточных τ. Воспользуемся им при $\tau = 1$. Получим

$$\|[A^z - A_{N,z}]f\|_{s+N+1,M} \le C_1 \int_{\Gamma_\delta} |\lambda|^{\operatorname{Re} z-1}|d\lambda|\|f\|_{s,M} \le C_2\|f\|_{s,M}. \tag{6}$$

Таким образом, оператор A^z совпадает с $A_{N,z}$ с точностью до прибавления оператора порядка $-N-1$. Теперь нужно учесть структуру оператора $B^{(N)}(\lambda)$ в (4). Имеем

$$A_{N,z}f = \sum_{q=1}^{K} \psi_q (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\delta} \lambda^z B_q^{(N)}(\lambda)(\varphi_q f)\, d\lambda. \tag{7}$$

Здесь q-е слагаемое в локальных координатах в O_q записывается в виде

$$\psi_q(x) \sum_{l=0}^{N} (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\delta} \lambda^z (2\pi)^{-n} \int b_{\theta,l}^{(q)}(x,\xi,\lambda) F(\varphi_q f)(\xi)\, d\xi\, d\lambda, \tag{8}$$

Этот повторный интеграл абсолютно сходится, так что можно изменить порядок интегрирования и переписать (8) в виде

$$\psi_q(x) \sum_{l=0}^{N} (2\pi)^{-n} \int e^{ix\cdot\xi} c_{\theta,l,z}^{(q)}(x,\xi) F(\varphi_q f)(\xi)\, d\xi, \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} c_{\theta,l,z}^{(q)}(x,\xi) &= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_\delta} \lambda^z b_{\theta,l}^{(q)}(x,\xi,\lambda)\, d\lambda \\ &= -\operatorname{Res}_{\lambda = a_0(x,\xi)} \{\lambda^z b_l^{(q)}(x,\xi,\lambda)\}, \end{aligned} \tag{10}$$

так как контур интегрирования можно заменить замкнутым контуром, обходящим единственный полюс $a_{\theta,0}(x,\xi)$ функций $b_{\theta,l}(x,\xi,\lambda)$ по часовой стрелке. Как нетрудно проверить,

$$c_{\theta,l,z}^{(q)}(x,t\xi) = t^{mz-l} c_{\theta,l,z}^{(q)}(x,\xi)(x,\xi) \quad (|\xi| \ge 1, t \ge 1) \tag{11}$$

и $c_{\theta,l,z} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. Отсюда видно, что (9) – ПДО из $\Psi_{ph}^{mz}(\mathbb{R}^n)$. Как следствие $A_{N,z}$ – ПДО из $\Psi_{ph}^{mz}(M)$, и то же получается для A^z.

Подробнее. По символам $c_{\theta,l,z}$ мы строим символ $c_z(x,\xi)$ с разложением

$$c_z^{(q)}(x,\xi) \sim c_{\theta,0,z}^{(q)} + c_{\theta,i,z}^{(q)} + \dots. \tag{12}$$

Здесь слагаемые не вполне однородны. Но их можно заменить следующими:

$$c_{l,z}^{(q)}(x,\xi) = |\xi|^{mz-l} c_{\theta,l}^{(q)}(x,\xi/|\xi|) \quad (\xi \ne 0), \tag{13}$$

это уже положительно однородные функции степени $mz - l$, и мы имеем

$$c_z^{(q)}(x,\xi) \approx c_{0,z}^{(q)}(x,\xi) + c_{1,z}^{(q)}(x,\xi) + \dots \tag{14}$$

Этому символу отвечает ПДО $A_{z,q} \in \Psi_{ph}^{mz}(\mathbb{R}^n)$. Строим ПДО A_z на M по формуле

$$A_z = \sum_{q=1}^{K} \psi_q A_{z,q}(\varphi_q \cdot). \tag{15}$$

От него ПДО A^z отличается на бесконечно сглаживающее слагаемое.

Так как $b_0 = (a_0 - \lambda)^{-1}$, то главный символ ПДО A^z есть

$$c_{0,z} = a_0^z = |a_0|^z \exp(iz \arg a_0) \tag{16}$$

(напомним,что у нас $|\arg a_0| < \pi$).

Наконец, на случай $\operatorname{Re} z \geq 0$ полученные результаты распространяются при помощи формулы $A^z = A^s \cdot A^{z-s}$, где s – натуральное число и $\operatorname{Re} z - s < 0$, с использованием теоремы о композиции ПДО. □

Следствие. *При предположениях теоремы A^z – эллиптический оператор, изоморфно и непрерывно отображающий $H^{s+m\operatorname{Re} z}(M)$ на $H^s(M)$ при любых $s \in \mathbb{R}$ и $z \in \mathbb{C}$.*

Действительно, порядок этого ПДО в соболевской шкале, как нетрудно проверить, равен $m \operatorname{Re} z$. Остается проверить, что $\operatorname{Ker} A^z = \{0\}$ и что индекс этого оператора равен нулю. Первое утверждение следует из того, что если $A^z u = 0$, то $u \in C^\infty(M)$ и $Au = A^{1-z}A^z u = 0$, так что $Au = 0$ и $u = 0$. Чтобы проверить второе, достаточно убедиться в том, что $\operatorname{Ker}(A^z)^* = \{0\}$. Это следует из того, что A^* – тоже позитивный оператор и $(A^z)^* = (A^*)^{\overline{z}}$. □

В частности, мы видим, что при $\operatorname{Re} z = 0$ оператор A^z ограничен. Такого свойства нет в общем случае для абстрактных операторов.

Далее, отметим, что A^z при $m \operatorname{Re} z < h$ – голоморфная функция от z со значениями, в пространстве операторов, действующих, например, ограниченным образом из $H^{s+h}(M)$ в $H^s(M)$ (с любым фиксированным s). Такого в абстрактном случае тоже, конечно, нет.

Пусть, в частности, $A = A^*$ – самосопряженный ПДО положительного порядка m на M с ортонормированным базисом $\{e_j\}_1^\infty$ из собственных функций и положительными собственными значениями $\lambda_j \nearrow \infty$. Тогда $A^z e_\nu = \lambda_\nu^z e_\nu$, оператор $A^{s/m}$ изоморфно и непрерывно отображает $H^s(M)$ на $H^0(M)$, и в $H^s(M)$ можно ввести норму

$$\|A^{s/m}u\|_{0,M} = \left[\sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{2s/m} |(u, e_\nu)|^2\right]^{1/2}, \tag{17}$$

она эквивалентна обычной норме в $H^s(M)$.

Если пользоваться в $H^s(M)$ отвечающим этой норме скалярным произведением

$$(A^{s/m}u, A^{s/m}v)_0 = \sum \lambda^{2s/m}(u, e_\nu)_{0,M}\overline{(v, e_\nu)}_{0,M}, \tag{18}$$

то A^z будет нормальным оператором в $H^s(M)$ при любом z, так как будет иметь там ортонормированный базис из собственных функций, самосопряженным при $z \in \mathbb{R}$. При $\operatorname{Re} z > 0$ область определения этого оператора – пространство $H^{s+m\operatorname{Re} z}(M)$.

В частности, изоморфизмы между соболевскими пространствами $H^s(M)$ теперь можно определять при помощи степеней оператора

$$\Lambda = (I - \Delta)^{1/2}, \tag{19}$$

где Δ – оператор Бельтрами–Лапласа.

Мероморфное продолжение ядра ПДО A^z. ПДО A^z является интегральным оператором с непрерывным ядром $K_z(x, y)$ при $m \operatorname{Re} z < -n$, т.е. при $\operatorname{Re} z < -n/m$. Это следует из второй теоремы Агмона. То же самое верно для операторов $A_{N,z}$, аппроксимирующих A^z. Но операторы $A_{N,z}$ допускают явное построение, и, используя их, удается доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Ядро $K_z(x, y)$ голоморфно по z при $\operatorname{Re} z < -n/m$. Его сужение $K_z(x, x)$ на диагональ в $M \times M$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость с возможными полюсами только в точках $z = (l - n)/m$ $(l = 0, 1, \dots)$. Все полюсы являются простыми, и вычеты в них вычисляются следующим образом*:

$$\rho_l(x) = \frac{1}{(2\pi)^n m}\sum_{q=1}^{K}\varphi_q(x)\int_{|\omega|=1}\operatorname{Res}_{\lambda=a_0^{(q)}(x,\omega)}\left[\lambda^{\frac{l-n}{m}}b_l^{(q)}(x, \omega, \lambda)\right]dS. \tag{1}$$

В соответствии с формулой (2) из предыдущего пункта функция $\lambda^{(l-n)/m}$ здесь и дальше голоморфна вне $\overline{\mathbb{R}}_-$ и положительна на R_+.

Вычет в первом полюсе $z = -n/m$ выражается формулой

$$\rho_0(x) = \frac{-1}{(2\pi)^n m}\sum_{q=1}^{K}\varphi_q(x)\int_{|\omega|=1}[a_0^{(q)}(x, \omega)]^{-n/m}dS. \tag{2}$$

На полное доказательство уже нет времени. Ключевой момент в нем состоит в следующем. Главная часть ядра l-го слагаемого в операторе (9) из предыдущего пункта при $x = y$ – это интеграл

$$(2\pi)^{-n}\int_{|\xi|\geq 1}c_{l,z}\,d\xi.$$

Переходя здесь к сферическим координатам, получим, что это выражение равно

$$(2\pi)^{-n}\int_{|\xi|=1}c_{l,z}(x, \omega)\,dS\int_1^\infty r^{mz-l+n-1}\,dr = \frac{-1}{(2\pi)^n(mz - l + n)}\int_{|\xi|=1}c_{l,z}(x, \omega)\,dS.$$

Ясно, что это выражение имеет простой полюс в точке $z = l - n/m$ с очевидным вычетом.

Дополнительные детали состоят в следующем. При $x \neq y$ ядро $K_z(x, y)$ продолжается до целой аналитической функции от z. Мероморфное продолжение ядра $K_z(x, x)$ не имеет полюса в точке $z = 0$, и его значение в этой точке выписывается.

Если A – дифференциальный оператор, то оно не имеет полюсов также в точках $z = j$ $(j = 0, 1, \dots)$, и его значения в этих точках тоже выписываются.

Интегрируя по M, получаем числовую функцию

$$\zeta(z, A) = \operatorname{tr} A^z = \int_M K_z(x, x)\, dx \quad (\operatorname{Re} z < -n/m). \tag{3}$$

Она называется *дзета-функцией оператора* A. Из теоремы 1 вытекает, что она голоморфна по z и допускает мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость с возможными полюсами только в точках $z = (l - n)/m$ $(l = 0, 1, \dots)$. При этом все полюсы являются простыми, и вычеты в них получаются интегрированием выражений (1) по M.

В точке $z = 0$ нет полюса, и значение этой функции в нуле выражается формулой

$$\zeta(0, A) = \frac{1}{(2\pi)^n m} \sum_{q=1}^{K} \int_M \varphi_q(x)\, dx \int_{|\omega|=1} dS \int_0^\infty b_n^{(q)}(x, \omega, -\sigma)\, d\sigma. \tag{4}$$

Если A – ДО, то полюсов нет во всех точках $z = j$ $(j = 0, 1, \dots)$, и значения аналитического продолжения $\zeta(l.A)$ в эти точки также выписываются. Значение $\zeta(l, A)$ называется *регуляризованным следом порядка* l *оператора* A.

Теперь мы выведем *аналитическую формулу для индекса* произвольного эллиптического ПДО L на M положительного порядка m. Для этого введем операторы

$$A_1 = I + L^*L \ \text{ и } \ A_2 = I + LL^*. \tag{5}$$

Легко понять, что это самосопряженные ПДО с собственными значениями, лежащими на луче $[1, \infty)$, так как

$$(A_1 f, f) = (f, f) + (Lf, Lf), \quad (A_2 f, f) = (f, f) + (L^* f, L^* f) \tag{6}$$

(скалярные произведения берутся по M). Поэтому мы можем рассмотреть функции $\zeta(z, A_1)$ и $\zeta(z, A_2)$. Из (6) видно также, что кратности собственного значения 1 у операторов A_1 и A_2 равны соответственно $\dim \operatorname{Ker} L$ и $\dim \operatorname{Ker} L^*$. С другой стороны, остальные собственные значения имеют у A_1 и A_2 одинаковые кратности. Это видно из того, что при $\lambda > 1$

$$A_1 u = \lambda u, \quad Lu = v \Longleftrightarrow A_2 v = \lambda v, \quad u = L^{-1} v.$$

Аналогично обстоит дело с A_1^z и A_2^z, и при $\operatorname{Re} z < -n/2m$ получаем

$$\varkappa(L) = \operatorname{tr} L_1^z - \operatorname{tr} L_2^z. \tag{7}$$

Используя теперь голоморфное продолжение дзета-функций в точку 0, получаем

$$\varkappa(L) = \zeta(0, A_1) - \zeta(0, A_2). \tag{8}$$

Это и есть желаемая формула. Правая часть вычисляется через слагаемые $a_0, \ldots, a_n$ в асимптотическом разложении локального полного символа. На самом деле индекс зависит только от a_0. Формула (8) применяется в доказательстве формулы Атьи–Зингера для индекса.

В заключение отметим, что *асимптотическую формулу для собственных значений самосопряженного оператора* A из прошлой лекции можно заново получить при помощи следующей *тауберовой теоремы Икехары* (она доказана в книге Шубина), рассматривая след оператора A^{-z} (с обратным знаком перед z).

Теорема 2. *Пусть* $N(t)$ *– неубывающая функция, равная* 0 *при* $t \leq 1$ *и такая, что интеграл*

$$\zeta(z) = \int_1^z t^z dN(t)$$

сходится при $\operatorname{Re} z < -h$, *где* $h > 0$, *причем функция*

$$\zeta(z) + \frac{A}{z+h}$$

непрерывно продолжается в замкнутую правую полуплоскость $\{z : \operatorname{Re} z \leq h\}$. *Тогда*

$$N(\lambda)\lambda^{-h} \to \frac{A}{h} \quad (\lambda \to \infty).$$

Заключительная обзорная лекция будет на второй неделе сентября.

Лекция 14 (обзорная и заключительная)

1. Классы ПДО в $\mathbb{R}^n$. Собственные ПДО. Вейлевские ПДО. В нашем курсе главной целью было построение теории эллиптических ПДО на замкнутом многообразии. Для простоты символы $a(x,\xi)$ из класса $S^m_{1,0}$ предполагались подчиненными оценкам

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}, \tag{1}$$

равномерным по x. Если задачи ставятся в $\mathbb{R}^n$, это может оказаться неудобным (например, в квантовой механике). Принято определять тогда этот класс оценками

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m-|\beta|} \quad (x \in K), \tag{2}$$

где K –любой компакт из K.

Отсутствие равномерной по x ограниченности символов при ограниченных ξ создает трудности при построении исчисления ПДО. Становится нужным понятие собственного ПДО, которое мы сейчас определим. Пусть сначала $m < -n$. Тогда ПДО $a(x,D)$ – интегральный оператор с ядром

$$K(x,y) = (2\pi)^{-n} \int e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi)\, d\xi.$$

Оно непрерывно.

Однако *ядро K_A в смысле Шварца* определено для любого оператора A, переводящего основные функции из $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ в обобщенные функции из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: оно определяется формулой

$$\langle Au, v\rangle = \langle K_A, u(y)v(x)\rangle \quad (u, v \in D(\mathbb{R}^n)), \tag{3}$$

и доказывается, что оно однозначно продолжается до обобщенной функции из $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ (теорема Лорана Шварца).

В случае ПДО A любого порядка с амплитудой $a(x,y,\xi)$ эта обобщенная функция определяется осциллирующим интегралом

$$\langle K_a, w\rangle = (2\pi)^{-n} \iiint e^{i(x-y)\cdot\xi} a(x,y,\xi) w(x,y)\, dx\, dy\, d\xi \quad (w \in \mathcal{D}(R^{2n})). \tag{4}$$

Ее сингулярный носитель сосредоточен на диагонали $x = y$ в $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$.

Итак, ПДО $a(x,D)$ всегда имеет ядро $K_A(x,y)$ в смысле обобщенных функций. Рассмотрим его носитель $\operatorname{supp} K_A(x,y)$. ПДО A называется *собственным*, если проекции этого носителя на координатные пространства $\mathbb{R}^n_x$ и $\mathbb{R}^n_y$ обладают следующим свойством: прообраз компакта – компакт.

В случае дифференциального оператора носитель его ядра – диагональ $x = y$ в $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$, поэтому дифференциальный оператор является собственным ПДО. В общем случае, чтобы превратить ПДО в собственный, достаточно умножить его амплитуду на бесконечно гладкую функцию $\Theta(x-y)$, равную единице при малых $|x-y|$ и нулю при достаточно больших $|x-y|$. Это умножение не

затрагивает сингулярный носитель ядра, так как он находится на диагонали $x = y$.

Оценки (1) и (2) хороши, если мы интересуемся эллиптическими ПДО (не обязательно равномерно эллиптическими). Более общие классы $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n)$ определяются оценками

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{m+\delta|\alpha|-\rho|\beta|} \quad (x \in K). \tag{5}$$

При однократном дифференцировании символа по ξ его порядок понижается не на 1, а на ρ, а при однократном дифференцировании по x этот порядок ухудшается на δ. Числа ρ и δ лежат на отрезке $[0,1]$. Относительно легкий случай – когда $\rho > \delta$. В частности, если при этом условии носитель ядра – компакт и $m = 0$, то оператор продолжается до ограниченного оператора в $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Эти классы нужны при изучении вырождающихся эллиптических операторов и построении параметриксов для них.

Подробности, относящиеся к этим классам, можно смотреть в книгах М.А. Шубина ("ПДО и спектральная теория") и Л.Хёрмандера.

У Шубина определены также интересные классы символов в $\mathbb{R}^n$ с оценками

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \le C_{\alpha,\beta}(1+|x|+\xi|)^{m-\rho(|\alpha|+|\beta|)}, \tag{6}$$

где $\rho \in (0,1]$, в простейшем случае $\rho = 1$. Здесь поведение символов при их дифференцировании по x и ξ "одинаково". Еще одна книга по таким ПДО – Helffer, 1984. Однако ПДО определяется по символу вот какой формулой:

$$Au(x) = \iint e^{i(x-y)\cdot\xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y)\, dy\, d\xi. \tag{7}$$

Это определение интересно, в частности, тем, что вещественному символу отвечает самосопряженный оператор. Такие ПДО появились в двадцатые годы прошлого века у Германа Вейля в квантовой механике. Псевдодифференциальными операторами в квантовой механике специально занимался Ф.А. Березин, он написал интересные работы. Шубин с ним контактировал, у них есть общие книги.

Пример дифференциального оператора из квантовой механики: оператор Шрёдингера для гармонического осциллятора на оси

$$\frac{h^2}{2m}D^2 + \left(E - \frac{m\omega^2 x^2}{2}\right).$$

Здесь символ имеет второй порядок роста как по x, так и по ξ.

2. ПДО на окружности и торе. Окружность и тор – это такие многообразия, на которых существует единая система координат. На окружности имеется в виду периодическая координата x, ее значения, отличающиеся на $2\pi k$ с целым k, отвечают одной и той же точке. Такую систему координат

можно ввести на любой замкнутой кривой, и в этом смысле замкнутая кривая не отличается от окружности. Рассмотрим оператор следующего вида:

$$Au(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a(x,l)e^{ixl}c_l(u), \quad \text{где} \quad c_l(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(y)e^{-ily}dy. \tag{8}$$

Здесь $c_l(u)$ – коэффициент Фурье функции u по тригонометрической системе экспонент. Структура этого оператора похожа на структуру ПДО в $\mathbb{R}^n$,

$$Au(x) = F^{-1}_{\xi\to x}a(x,\xi)(Fu)(\xi),$$

только в (8) вместо прямого преобразования Фурье используется переход от функции к набору ее коэффициентов Фурье, а вместо обратного преобразования Фурье – суммирование ряда по экспонентам. Оказывается, что если $a(x,\xi)$ – полиоднородный символ на $\mathbb{R}^1\times\mathbb{R}^1$ из класса $S^m_{1,0}$ с главной частью $a_0(x,\xi)$, 2π-периодический по x, то (8) – полиоднородный ПДО на окружности порядка m с главным символом $a_0(x,\xi)$. Получаем ПДО "в дискретном представлении". Для такого ПДО глобально определены, как в $\mathbb{R}^n$, все члены разложения символа, а не только главный символ. Все исчисление ПДО на окружности можно строить, не выходя за рамки рядов (8) типа Фурье.

Такие ПДО на торе обсуждал Л.Р. Волевич на студенческом семинаре в середине 60-х гг., рассматривая их как адаптированную, игрушечную модель ПДО. Он даже ничего не опубликовал. Но позднее выяснилось, что это вовсе не игрушка, такое представление ПДО на окружности используется в спектральной теории ПДО на замкнутой кривой и в приближенных вычислениях. См. указания в моем обзоре в книге "Современные проблемы математики, Фундаментальные направления", т. 63, ВИНИТИ, 1990, и работы Wendland'a с соавторами, примерно 1993 г.

Единая система координат есть еще на нескольких многообразиях. Псевдодифференциальными операторами на них несколько лет назад занимался Turunen.

3. Интегральные операторы Фурье. ИОФ – интегральный оператор Фурье – более общий объект, чем ПДО. Формально он определяется так:

$$Au(x) = \iint e^{i\Phi(x,y,\xi)}a(x,y,\xi)u(y)\,dy\,d\xi. \tag{9}$$

Неформально это обобщенная функция, определяемая формулой

$$\langle Au, v\rangle = \iiint e^{i\Phi(x,y,\xi)}a(x,y,\xi)u(y)\,dx\,dy\,d\xi \quad (u,v\in\mathcal{D}). \tag{10}$$

Здесь $a(x,y,\xi)$ – амплитуда, обычно из класса $S^0_{1,0}$. Иногда на этом месте пишут символ $a(x,\xi)$. Функция $\Phi(x,y,\xi)$, называемая *фазовой функцией*, обычно вещественна, иногда она пишется в виде $\Phi(x,\xi)$. Обычно она положительно однородна степени 1 по ξ или, по крайней мере, принадлежит классу $S^1_{1,0}$.

Предполагается также, что при $\xi \neq 0$ ее градиент (или градиент по x, y) не обращается в нуль. Обе функции бесконечно гладкие (по крайней мере, при $\xi \neq 0$). В случае ПДО

$$\Phi = (x - y) \cdot \xi.$$

Мы знаем, что если A – ПДО и B – обратимый ПДО, то $B^{-1}AB$ – тоже ПДО с тем же главным символом. Грубо говоря, верен такой факт: если A – ПДО и B – обратимый ИОФ, то $B^{-1}AB$ – тоже ПДО и его главный символ можно найти, но он уже, вообще говоря, отличен от главного символа ПДО A. Это обстоятельство можно использовать для упрощения главного символа ПДО при помощи преобразований подобия, что полезно в теории уравнений в частных производных и спектральной теории. Например, если мы на окружности имеем эллиптический ПДО A ненулевого порядка, то можно построить такой обратимый ИОФ B, что все члены асимптотического разложения полного символа ПДО $B^{-1}AB$ не будут зависеть от x (Г. Розенблюм). Это позволяет получить полное разложение собственного значения λ_n оператора A на замкнутой кривой (если A – оператор положительного порядка для простоты с неотрицательными собственными значениями, то они нумеруются в порядке неубывания с учетом кратности) в асимптотический ряд по убывающим целым степеням номера n.

Интегральные операторы Фурье ввел Хёрмандер (1968, 1971) но потом выяснилось, что в литературе уже существовал близкий объект – *канонический оператор* В.П. Маслова. Свою замечательную теорему о точной оценке остатка в асимптотике собственных значений самосопряженного эллиптического оператора Хёрмандер доказал именно при помощи ИОФ. Если A –неотрицательный самосопряженный эллиптический ПДО 1-го порядка (к этому случаю легко сводится случай произвольного положительного порядка), то в виде ИОФ можно приближенно построить оператор e^{-itA} при малых $|t|$ и изучить асимптотику его ядра и следа при $t \to 0$, а это (вместе с соответствующими тауберовыми теоремами) ключ к нахождению точной асимптотики собственных значений. (К сожалению, в случае матричного ПДО в общем случае это не получается.)

Оператор e^{-itA} позволяет решать задачу Коши для гиперболического уравнения $\partial_t u + iAu = 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + iAu = 0, \quad u|_{t=0} = u_0. \tag{11}$$

ИОФ позволяют изучить особенности фундаментального решения этой задачи Коши и тем самым выяснить, как распространяются особенности начальной функции при росте t. При этом интересен не только сингулярный носитель, но и *волновой фронт* обобщенной функции – некоторое множество в $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_\xi$. Определение такое: точка (x_0, ξ_0) не принадлежит волновому фронту $WF(u)$ обобщенной функции $u(x)$, если достаточно близко к x_0 она равна такой обобщенной функции $v(x)$ с компактным носителем, что ее преобразование Фурье $\widetilde{v}(\xi)$ быстро убывает в конической окрестности точки ξ_0.

Литература: книги Хёрмандера, Шубина и Ю.В. Егорова ("Уравнения главного типа", 1984).

4. Структура ядра полиоднородного ПДО. Ее изучил Seeley (1965). Особенно интересен случай ПДО неположительного порядка, так как тогда это ядро интегрального оператора. Фактически выясняется, какие интегральные операторы являются псевдодифференциальными. В частности, при нулевом порядке это сингулярные интегральные операторы (интеграл понимается в смысле главного значения по Коши) с точностью до прибавления интегральных операторов с более гладкими ядрами.

Грубо говоря, результат такой: асимптотическому разложению локального полного символа по однородным символам убывающих порядков отвечает асимптотическое разложение ядра по функциям от $(x, x-y)$, положительно однородным по второму переменному возрастающих степеней, иногда с добавочными логарифмическими множителями. Подробности см. в моем обзоре. Псевдодифференциальными операторами отрицательного порядка являются, например, такие операторы: берем фундаментальное решение $\mathcal{E}(x)$ эллиптического оператора в $\mathbb{R}^n$ для простоты с постоянными коэффициентами и рассматриваем интегральный оператор на замкнутой гиперповерхности с ядром $\mathcal{E}(x-y)$. Это интересно, в частности, по той причине, что для таких интегральных операторов имеет смысл понятие эллиптичности и справедливы теоремы эллиптической теории. Примеры будут в следующем пункте.

5. Граничные задачи для уравнений второго порядка и интегральные операторы типа потенциала. В нашем курсе не было времени для рассмотрения общих эллиптических граничных задач. Но мы сейчас можем кратко рассмотреть задачи, которые можно объяснить на основе обязательного курса по уравнениям математической физики. Рассмотрим, например, однородное уравнение Гельмгольца

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0 \tag{12}$$

в ограниченной трехмерной области $G = G^+$ с гладкой границей S. Простейшие граничные условия на S ставятся следующим образом (плюсиком наверху обозначаем граничные значения). Это условие Дирихле

$$u^+ = f \tag{13}$$

или условие Неймана

$$\partial_\nu u^+ = g, \tag{14}$$

где ∂_ν – производная вдоль внешней (для определенности) нормали.

Эти задачи можно решать при помощи потенциалов простого и двойного слоя. Обозначим через $\mathcal{E}(x)$ фундаментальное решение уравнения Гельмгольца

$$\mathcal{E}(x) = -\frac{1}{4\pi}\frac{e^i k|x|}{|x|}. \tag{15}$$

Потенциал простого слоя с плотностью φ имеет вид

$$u(x) = \mathcal{A}\varphi(x) = \int_S \mathcal{E}(x-y)\varphi(y)\, dS_y. \tag{16}$$

Его сужение на S – интегральный оператор

$$A\varphi(x) = \int_S \mathcal{E}(x-y)\varphi(y)\,dS_y \quad (x \in S). \tag{17}$$

Оказывается, что это эллиптический ПДО порядка -1 с отрицательным главным символом. Решение задачи Дирихле можно искать (например) в виде (16), тогда для φ получается эллиптическое уравнение $A\varphi = f$ на S. Это интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода, но "очень хорошее".

Решение задачи Неймана тоже можно искать в виде (16), тогда для φ получается уравнение

$$\Big(-\frac{1}{2}I + B'\Big)\varphi = g \quad (x \in S), \tag{18}$$

где B' – оператор, сопряженный к прямому значению оператора двойного слоя:

$$B'\varphi(x) = \int_S \partial_{\nu_x}\mathcal{E}(x-y)\varphi(y)\,dS_y. \tag{19}$$

Последний в случае гладкой поверхности – ПДО порядка не выше -1, так что слева в (18) – эллипический ПДО порядка 0.

Есть еще третье граничное условие, аналогичные внешние задачи, задачи сопряжения и спектральные задачи со спектральным параметром в граничном условии. Все эти задачи удобно исследовать при помощи ПДО. См. мою статью в УМН 2002, вып.5, и ссылки в ней.